$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^n}}{\sqrt{x}}\, dx$$

(a) • $x \longmapsto \dfrac{e^{-x^n}}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0,+\infty[$

• Au voisinage de $x \to +\infty$, $x>1$ donc $x^n > x$

on a $\left| \dfrac{e^{-x^n}}{\sqrt{x}} \right| = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-x^n}$

$\leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-x}$

$\leq e^{-x}$ intégrable en $+\infty$

• Au voisinage de $x \to 0$

on a $\dfrac{e^{-x^n}}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ intégrable en 0

Donc $x \longmapsto \dfrac{e^{-x^n}}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$

et donc $\underline{I_n \text{ existe}}$.

(b) Notons $f_n : x \longmapsto \dfrac{e^{-x^n}}{\sqrt{x}}$

• <u>Étude de la convergence simple</u> : soit $x \in]0,+\infty[$ fixé.

* si $x \in]0,1[$, $x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

* si $x=1$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1}$

* si $x>1$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Ainsi $(f_n)_n$ converge simplement vers f où :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0,1[\\ e^{-1} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \in]1,+\infty[\end{cases}$$

- Les f_n et f sont continues par morceaux sur $]0,+\infty[$
- Dominons.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,+\infty[$. $|f_n(x)| = \frac{e^{-x^n}}{\sqrt{x}}$

* si $x \in]0,1[$, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

* si $x \in [1,+\infty[$, $|f_n(x)| \leq \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \leq e^{-x}$

On a donc $|f_n(x)| \leq \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0,1[\\ e^{-x} & \text{si } x \in [1,+\infty[\end{cases}$

où φ est indépendante de n et intégrable sur $]0,+\infty[$

Ainsi, par convergence dominée

$$I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$
$$= \left[2\sqrt{x}\right]_0^1$$
$$= 2$$