$$f(2x) = 2f(x) - 2f(x)^2 \qquad (E)$$

(a) Soit $f : x \longmapsto \lambda \in \mathbb{R}$ une fonction constante.

$$f \text{ sol. de } E \iff \lambda = 2\lambda - 2\lambda^2$$

$$\iff 0 = \lambda(1 - 2\lambda)$$

$$\iff \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = \frac{1}{2}$$

(b) Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f : x \longmapsto x\,h(x)$

$$f \text{ sol de } (E) \iff \forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = 2f(x) - 2f(x)^2$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ 2x\,h(2x) = 2x\,h(x) - 2x^2 h(x)^2$$

l'égalité est triviale pour $x = 0$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}^*\quad h(2x) = h(x) - x\,h(x)^2$$

Cette égalité est vérifiée pour $x = 0$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}\quad h(2x) = h(x) - x\,h(x)^2$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}\quad h(x) = h\left(\frac{x}{2}\right) - \left(\frac{x}{2}\right)\left(h\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$$

pour faire le lien avec ce qui suit.

(c) • Soit $x \in [0,1]$ fixé.

$$|T_x'(y)| = |1 - xy|$$

$$= 1 - xy$$

$$\leq 1 \qquad \forall y \in [0,1]$$

donc par l'inégalité des accroissements finis,

T_x est 1-lipschitzienne sur $[0,1]$

- Le calcul précédent donne aussi le tableau de variations suivant :

y	0		1
$T_x'(y)$		$+$	
T_x	0	$\nearrow$	$1-\frac{x}{2}$

Comme $1-\frac{x}{2} \leqslant 1$, $[0,1]$ est stable par T_x

(d) • <u>Étude de la convergence simple</u>

Soit $x \in [0,1]$ fixé.

On va exploiter le lien suite-série, et montrer que la série $\sum \left(h_{n+1}(x) - h_n(x)\right)$ converge.

* Comme $[0,1]$ est stable par T_x, par récurrence,

$h_n(x) \in [0,1]$ pour tout n.

* On a :

$$\begin{aligned}
|h_{n+1}(x) - h_n(x)| &= \left|T_x\left(h_n\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) - T_x\left(h_{n-1}\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)\right| \\
&\leq \left|h_n\left(\tfrac{x}{2}\right) - h_{n-1}\left(\tfrac{x}{2}\right)\right| \quad \text{par 1-lipschitzien} \\
&\leq \left|h_1\left(\tfrac{x}{2^n}\right) - h_0\left(\tfrac{x}{2^n}\right)\right| \quad \text{par récurrence}
\end{aligned}$$

$$= \left| h_0\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) - \frac{x}{2^{n+1}}\left(h_0\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\right)^2 - h_0\left(\frac{x}{2^n}\right) \right|$$

$$= \frac{x}{2^{n+1}} \quad \text{car } h_0(t) = 1$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{t.g. d'une série géométrique absolument convergente}$$

Donc $\sum h_{n+1}(x) - h_n(x)$ converge absolument, donc converge, donc la suite $(h_n(x))_n$ converge

On a montré la convergence simple de $(h_n)_n$

On note h la limite simple de $(h_n)_n$.

- Étude de la convergence uniforme

Pour $x \in [0,1]$, par télescopage :

$$|h(x) - h_n(x)| = \left|\sum_{k=n}^{+\infty} h_{k+1}(x) - h_k(x)\right|$$

$$\leq \sum_{k=n}^{+\infty} |h_{k+1}(x) - h_k(x)|$$

$$\leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \quad \text{par le calcul précédent}$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2^n} \quad \text{indép. de } x$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

On a montré que la convergence est uniforme sur $[0,1]$

(e) • h_0 est continue, donc par récurrence h_n est continue pour tout n. La convergence étant uniforme, on en déduit que

<u>h est continue sur $[0,1]$</u>

• $h_0(0) = 1$ donc par récurrence, $h_n(0) = 1$ $\forall n$

donc <u>h n'est pas nulle</u>

• $\forall n$, $\quad h_{n+1}(x) = h_n\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2} h_n\left(\frac{x}{2}\right)^2$

donc, à la limite pour $n \to +\infty$ (à x fixé)

$$h(x) = h\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2} h\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

Par (b), $f : x \mapsto x\,h(x)$ est donc solution de (E) sur $[0,1]$

Elle est continue, car h l'est, non constante car équivalente à $x \cdot 1$ pour $x \to 0$

(f) Pour $x \in \,]1, 2]$, on pose $f(x) = 2 f\left(\frac{x}{2}\right) - 2\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$

On a donc prolongé f à $[0, 2]$.

Ce prolongement est continu en 1 car, pour $x > 1$

$$f(x) = 2 f\left(\frac{x}{2}\right) - 2 f\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$\xrightarrow[x \to 1]{>} 2 f\left(\tfrac{1}{2}\right) - 2 f\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \quad \text{par continuité de } f \text{ en } \tfrac{1}{2}$$

$$= f(1) \quad \text{par (E) sur } [0,1]$$

On réitère en prolongeant f à $[0, 4]$, $[0, 8]$, ..., $[0, 2^n]$.