Pour $x \geq 0$, $n \geq 1$ $\qquad f_n(x) = \dfrac{1 + x^{2n+1}}{1 + x^{2n}}$

(a) <u>Étude de la convergence simple</u>

Soit $x \geq 0$ fixé. Au voisinage de $n \to +\infty$

* <u>1^{er} cas</u> : $x < 1$

$$\text{Alors } f_n(x) = \frac{1 + o(1)}{1 + o(1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

* <u>2^e cas</u> : $x = 1$

$$\text{Alors } f_n(1) = \frac{2}{2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

* <u>3^e cas</u> : $x > 1$

$$\text{Alors } f_n(x) = \frac{1 + x^{2n+1}}{1 + x^{2n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{x^{2n+1}}{x^{2n}} = x \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$$

Ainsi, $(f_n)_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

(b) Étude de la convergence uniforme

On veut majorer uniformément en x $|f_n(x) - f(x)|$

* pour $x > 1$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1+x^{2n+1}}{1+x^{2n}} - x \right|$$

$$= \left| \frac{1-x}{1+x^{2n}} \right|$$

$$= \frac{x-1}{x^{2n}+1}$$

$$\leqslant \frac{x-1}{x^{2n}-1} \qquad \text{car } x^{2n}+1 \geqslant x^{2n}-1 > 0$$

$$= \frac{1}{\frac{x^{2n}-1}{x-1}}$$

$$= \frac{1}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1}}$$

somme géométrique

$$\leqslant \frac{1}{1+1+1+\cdots+1}$$

$$= \frac{1}{2n}$$

ce majorant n'est pas (encore) indép de x, car il s'agit du cas où $x \leq 1$.

* pour $x = 1$ $\quad |f_n(1) - f(1)| = 0 \leq \frac{1}{2n}$

* pour $x \leq 1$,

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1+x^{2n+1}}{1+x^{2n}} - 1 \right|$$

$$= \frac{x^{2n}(1-x)}{1+x^{2n}}$$

$$\leq \frac{x^{2n}}{\frac{1-x^{2n}}{1-x}}$$

$1+x^{2n} \geq 1-x^{2n} > 0$

$$= \frac{x^{2n}}{1+x+x^2+ \dots + x^{2n-1}}$$

$$\leq \frac{x^{2n}}{x^{2n-1} + x^{2n-1} + \dots + x^{2n-1}}$$

en minorant le dénominateur

$$= \frac{x^{2n}}{2n \; x^{2n-1}}$$

$$= \frac{x}{2n}$$

$$\leq \frac{1}{2n}$$

Bref, pour tout $x \geq 0$:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

indép. de x (*)

donc la convergence est uniforme

(*) Cette majoration indépendante de x permet de justifier que

$$\|f_n - f\|_\infty^{[0,+\infty[} \leq \frac{1}{2n}.$$