Dans cet exercice, tous les termes sont >0

(a) On suppose $\exists N$ tq $\forall n \geq N$ $\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$

donc $\forall n \geq N$, $\quad \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$

Ainsi $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq N}$ est décroissante.

On note $A = \frac{u_N}{v_N}$. Par récurrence,

$$\forall n \geq N, \quad \frac{u_n}{v_n} \leq A$$

donc $0 \leq u_n \leq A v_n$

On a montré $u_n = O(v_n)$

(b) Notons $v_n = \frac{1}{n^\beta}$ t.g. d'une série de Riemann.

à laquelle on va comparer u_n

Au voisinage de $n \to +\infty$:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\beta$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\beta}$$

$$= 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Donc $\quad \frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\alpha - \beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

On choisit donc $1 < \beta < \alpha$

et on a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \underbrace{\frac{\alpha-\beta}{n}}_{>0}$$

Donc, à partir d'un certain rang,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} \text{ est du signe de } \frac{\alpha-\beta}{n}$$

ie >0

Ainsi, par (a) $u_n = O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$

et donc, comme $\beta>1$, $\sum u_n$ converge.

(c) On reprend le raisonnement avec $w_n = \frac{1}{n}$.

Au voisinage de $n \to +\infty$:

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{n}{n+1}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

$$= 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On a donc

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \frac{\alpha-1}{n}$$

<0 au voisinage de $+\infty$

donc, par (a) $w_n = O(u_n)$

or $\sum w_n$ diverge, donc $\sum u_n$ diverge

(d) • Si $a \in \mathbb{N}$, u_n est nulle à partir d'un certain rang.

donc $\sum u_n$ converge.

• Si $a \notin \mathbb{N}$:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|a-n|}{n+1}$$

$$= \frac{n-a}{n+1} \qquad \text{pour } n \text{ assez grand}$$

$$= (n-a)\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

$$= \left(1-\frac{a}{n}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= 1 - \frac{(a+1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On applique ce qui précède avec $\alpha = a+1$:

Si $a > 0$, $\sum u_n$ converge

Si $a < 0$, $\sum u_n$ diverge

• En conclusion : $\sum u_n$ converge $\iff a \geq 0$