

(a) On définit $f_n(x) = \ln(x) - \operatorname{Arctan}(x) - n\pi$

• f_n est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$

• $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$ et $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

par opérations sur les limites

$$\begin{aligned} \bullet f_n'(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{x^2 - x + 1}{x(1+x^2)} \\ &= \frac{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}{x(1+x^2)} \\ &> 0 \end{aligned}$$

donc f_n est strictement croissante

Par le th de la bijection, il existe un unique $x_n \in]0, +\infty[$

t.q. $\ln x_n = \operatorname{Arctan} x_n + n\pi$

On a $x_n = \exp(\operatorname{Arctan}(x_n) + n\pi)$

$$\geq \exp\left(-\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$$

$$\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

donc, par minoration, $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$

(b) On cherche un équivalent de x_n

Au voisinage de $n \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned}x_n &= \exp(\operatorname{Arctan} x_n + n\pi) \\&= \exp\left(\frac{\pi}{2} + o(1) + n\pi\right) \\&= \exp(n\pi) \cdot \exp\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \underbrace{\exp(o(1))}_{\substack{\text{limite 1:} \\ \text{c'est } 1+o(1)}} \\&\underset{+\infty}{\sim} \left(\exp(\pi)\right)^n \cdot e^{\pi/2}\end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{x_n} \underset{+\infty}{\sim} e^{-\pi/2} \cdot \left(\frac{1}{e^\pi}\right)^n$

↑
t.g. série géométrique
absolument convergente

donc $\sum \frac{1}{x_n}$ converge