(a) • Notons $\varphi(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$. $\quad \varphi'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2} \leq 0$ sur $[e,+\infty[$

donc φ est décroissante sur $[e,+\infty[$

• Ainsi $\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)_{n\geq 3}$ est <u>positive</u>, <u>décroissante</u>, <u>de limite nulle</u> (par croissances comparées), donc par le <u>théorème spécial des séries alternées</u>, $\displaystyle\sum_{n\geq 3} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ converge.

On en déduit que $\displaystyle\sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ converge.

(b) On calcule:

$$\frac{\ln n}{1+(-1)^n n} = (-1)^n \frac{\ln n}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n}}$$

$$= (-1)^n \frac{\ln n}{n} \cdot \left(1 - \frac{(-1)^n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= (-1)^n \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$

ce qui est le résultat annoncé :

$$\frac{\ln n}{1+(-1)^n n} - (-1)^n \frac{\ln n}{n} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\ln n}{n^2}$$

(c) $$\left| -\frac{\ln n}{n^2} \right| = \frac{o(n^{1/2})}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

donc $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{\ln n}{1+(-1)^n n} - (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ converge absolument par comparaison à une série de Riemann.

(d) Déterminer le domaine de définition de S, c'est trouver les valeurs de x pour lesquelles $S(x)$ existe, c'est-à-dire $\sum_{n\geq 2} f_n(x)$ converge.

- Si $x<0$,

$$|f_n(x)| = \left| \frac{\ln n}{1+(-1)^n n} e^{-\sqrt{n}\,x} \right|$$

$$\underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n} e^{-\sqrt{n}\,x}$$

$$= \frac{2\ln\sqrt{n}}{(\sqrt{n})^2} e^{-x\sqrt{n}}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \quad \text{par croissances comparées}$$

donc $\sum f_n(x)$ diverge grossièrement

- Si $x=0$,

$$f_n(0) = \underbrace{(-1)^n \frac{\ln n}{n}}_{\substack{\text{t.g série cv} \\ \text{par (a)}}} \underbrace{- \frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)}_{\substack{\text{équivalent à } -\frac{\ln n}{n^2} \\ \text{t.g série absolument convergente} \\ \text{par (c)}}}$$

donc $\sum_{n\geq 2} f_n(0)$ converge

- Si $x>0$,

$$|f_n(x)| \sim \frac{\ln n}{n} e^{-x\sqrt{n}}$$

$$= \frac{\ln n}{n} O\left(e^{-x\ln n}\right) \quad \text{car } \sqrt{n} > \ln n \text{ et } x>0$$

$$= \frac{\ln n}{n} O\left(\frac{1}{n^x}\right)$$

$$= \frac{o(n^{x/2})}{n} O\left(\frac{1}{n^x}\right) \quad \text{car } \ln n = o(n^{x/2}) \ (x>0)$$

$$= o\left(\frac{1}{n^{1+x/2}}\right)$$

donc $\underline{\sum_{n\geq 2} f_n(x) \text{ converge absolument}}$ par comparaison à une série de Riemann convergente.

<u>Conclusion</u>. <u>Le domaine de définition de S est $[0, +\infty[$</u>.