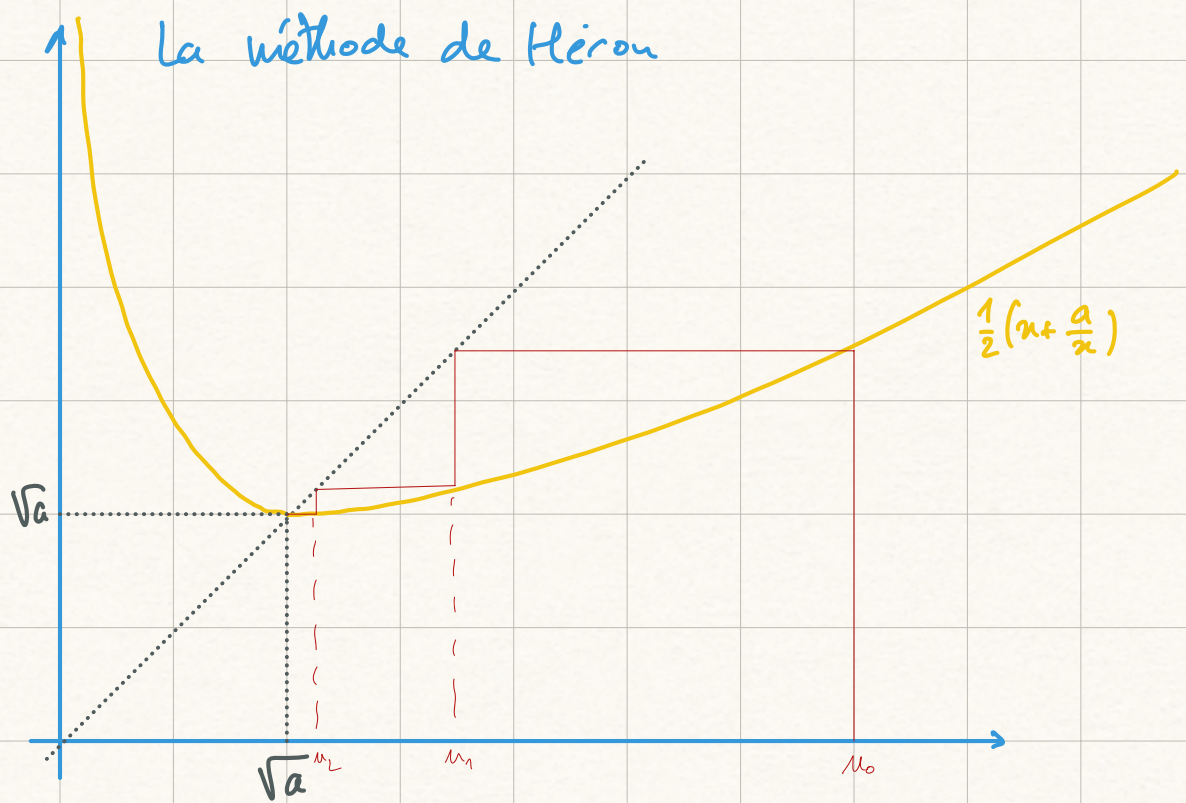




(a) Notons  $f: x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$  définie sur  $]0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2x^2}(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})$$

$$f(x) - x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) - x$$

$$= \frac{1}{2x}(a - x^2)$$

$$= \frac{1}{2x}(\sqrt{a} - x)(\sqrt{a} + x)$$

D'où le tableau:

| $x$        | 0         | $\sqrt{a}$ | $+\infty$ |
|------------|-----------|------------|-----------|
| $f$        | $+\infty$ | $\sqrt{a}$ | $+\infty$ |
| $f(x) - x$ | +         | 0          | -         |

- $\forall n_0 \in \mathbb{R}, u_n \in [\sqrt{a}, +\infty[$

On étudie plutôt  $(u_n)_{n \geq 1}$ .

- $[\sqrt{a}, +\infty[$  est stable par  $f$ .

donc, par récurrence,

$\forall n \in \mathbb{N}^* u_n$  existe et  $u_n \in [\sqrt{a}, +\infty[$

- Vu l'étude du signe de  $f(n) - n$ ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

$$\leq u_n$$

donc  $(u_n)_n$  est décroissante

- Étant minorée (par  $\sqrt{a}$ ), elle converge.

On note  $l$  sa limite

- Or,  $u_{n+1} = f(u_n)$  donc, à la limite

$$l = f(l)$$

et donc  $l = \sqrt{a}$  vu l'étude de  $f(n) - n$

CCP:

$$u_n \xrightarrow{+\infty} \sqrt{a}$$

(b) Pas clair, l'apparition du carré dans le majorant.

Partons plutôt « à l'envers »

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned}\frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}} &= \frac{1}{2\sqrt{a}} (u_n^2 - 2u_n\sqrt{a} + a) \\ &= \frac{u_n}{\sqrt{a}} \left( \frac{u_n}{2} + \frac{a}{2u_n} - \sqrt{a} \right) \\ &= \frac{u_n}{\sqrt{a}} (f(u_n) - \sqrt{a}) \\ &= \frac{u_n}{\sqrt{a}} (u_{n+1} - \sqrt{a}) \\ &\geq u_{n+1} - \sqrt{a} \quad \text{car } u_n \geq \sqrt{a} \\ &\quad \text{et } u_{n+1} \geq \sqrt{a}\end{aligned}$$

(Les valeurs absolues ne sont pas utiles)

(c) Ainsi,

$$\begin{aligned}|u_n - \sqrt{a}| &\leq \frac{1}{2\sqrt{a}} |u_{n-1} - \sqrt{a}|^2 \\ &\leq \left( \frac{1}{2\sqrt{a}} \right) \cdot \left( \frac{1}{2\sqrt{a}} |u_{n-2} - \sqrt{a}|^2 \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{a}} \left( \frac{1}{2\sqrt{a}} \left( \frac{1}{2\sqrt{a}} |u_{n-3} - \sqrt{a}| \right)^2 \right)^2 \\ &\dots \\ &\leq \left( \frac{1}{2\sqrt{a}} \right)^{\overbrace{1+2+4+\dots+2^{n-2}}^{n-1 \text{ termes}}} |u_1 - \sqrt{a}|^{\overbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}^{n-1 \text{ fois}}}\end{aligned}$$

$$= \left( \frac{1}{2\sqrt{a}} \right)^{\frac{1-2^{n-1}}{1-2}} |u_1 - \sqrt{a}|^{2^{n-1}}$$

$$= \left( \frac{1}{2\sqrt{a}} \right)^{2^{n-1}-1} \cdot |u_1 - \sqrt{a}|^{2^{n-1}}$$

On pourrait aussi faire ce calcul au brouillon, et justifier la formule par récurrence sur  $n$ .

(d) Si  $u_0 \geq \sqrt{a}$ , on a même  $|u_n - \sqrt{a}| \leq \left( \frac{1}{2\sqrt{a}} \right)^{2^n-1} |u_0 - \sqrt{a}|^{2^n}$   
 Si  $u_0 \leq \sqrt{a}$ , *bof*.

(e) Pour avoir  $|u_n - \sqrt{2}| \leq 10^{-100}$ ,

il suffit de choisir  $n$  tq  $(*) \left( \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^{2^n-1} |2 - \sqrt{2}|^{2^n} \leq 10^{-100}$

↑  
ce verbe doit apparaître ici

$$(*) \Leftrightarrow \left( \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \right)^{2^n} \leq \frac{10^{-100}}{2\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2^n \ln \left( \frac{\sqrt{2}-1}{2} \right) \leq -100 \ln 10 - \ln(2\sqrt{2})$$

$$\Leftrightarrow 2^n \geq \frac{100 \ln 10 + \frac{3}{2} \ln 2}{\ln 2 - \ln(\sqrt{2}-1)}$$

↑  
 $\simeq 146,9 \dots$

On sait que  $2^7 = 128$ ,  $2^8 = 256$

En choisissant  $n=8$ , on a  $|\mu_8 - \sqrt{2}| \leq 10^{-100}$