

Soit $p : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une application continue.

On suppose que, pour tout t , $p(t)$ est la matrice d'un projecteur.

Montrer que le rang de $p(t)$ ne dépend pas de t .

Comme $p(t)$ est un projecteur, on a

$$\text{rg}(p(t)) = \text{tr}(p(t))$$

Donc $f: t \mapsto \text{rg}(p(t)) = \text{tr}(p(t))$ est continue

(composition de p continue et tr linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension finie) sur $[0, 1]$ convexe par arcs.

Donc $f([0, 1])$ est convexe par arcs, et est inclus dans

$\{0, 1, 2, \dots, n\}$ en tant que rang.

Donc $\exists k \in \{0, 1, \dots, n\} \quad \forall t \in [0, 1]$

$$\text{rg}(p(t)) = k$$

le rang de $p(t)$ ne dépend pas de t