(a) • $\alpha(t)u$ est le projeté orthogonal de $f(t)$ sur $\mathrm{Vect}(u)$

donc, comme (u) est une base orthonormale de $\mathrm{Vect}(u)$,

$\underline{\alpha(t) = \langle f(t), u \rangle}$

$x \longmapsto \langle x, u \rangle$ est continue car linéaire sur E

de dimension finie, et f est supposée continue,

donc $\underline{\alpha \text{ est continue sur } [a,b]}$

• $\underline{v : t \longmapsto f(t) - \alpha(t)u \text{ est continue}}$ sur $[a,b]$

comme différence de deux fonctions continues.

Remarque: $E = \mathrm{Vect}(u) \oplus \mathrm{Vect}(u)^{\perp}$

$v(t)$ est la composante de $f(t)$ dans $\mathrm{Vect}(u)^{\perp}$

selon cette décomposition, donc est continue.

(b) On calcule :

$$< u , \int_a^b v(t)\, dt >$$

$$= \int_a^b < u, v(t) > dt \qquad \text{par linéarité de } <u, \cdot>$$

$$= \int_a^b 0 \ dt \qquad \text{car } v(t) \in \mathrm{Vect}(u)^{\perp} \ \forall t$$

$$= 0$$

donc $\underline{\int_a^b v(t)\, dt \text{ est orthogonal à } u}$.

(c) On a, d'une part :

$$\left(\int_a^b \|f(t)\| dt \right) u = \int_a^b f(t)\, dt \qquad \text{par déf. de } u$$

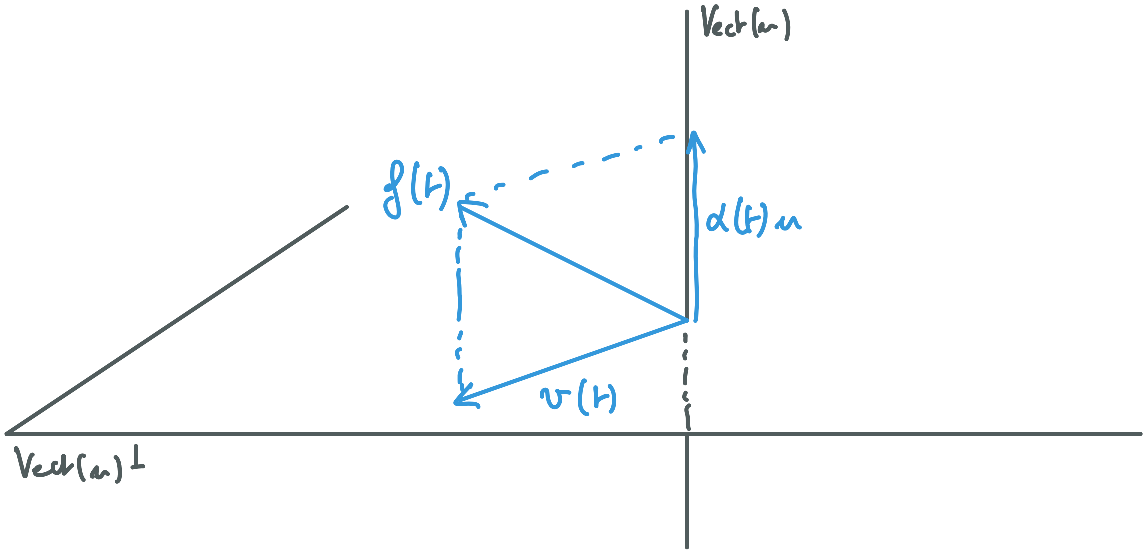
$$= \int_a^b \left(\alpha(t) u + v(t) \right) dt$$

$$= \underbrace{\left(\int_a^b \alpha(t)\, dt \right) u}_{\in \mathrm{Vect}(u)} + \underbrace{\int_a^b v(t)\, dt}_{\substack{\in \mathrm{Vect}(u)^{\perp} \\ \text{par (b)}}}$$

donc, par unicité de la décomposition selon $\mathrm{Vect}(u) \oplus \mathrm{Vect}(u)^{\perp}$:

$$\underline{\int_a^b \alpha(t)\, dt = \int_a^b \|f(t)\|\, dt}$$

(d)



Par le th de Pythagore :

$$\alpha(t)^2 = \| \alpha(t) u \|^2$$

$$= \| f(t) \|^2 - \| v(t) \|^2$$

$$\leq \| f(t) \|^2$$

donc $|\alpha(t)| \leq \| f(t) \|$ et donc $\underline{\alpha(t) \leq \| f(t) \|}$

(e) On note $g(t) = \| f(t) \| - \alpha(t)$

par (c), $\int_a^b g(t)\, dt = 0$,

par (d), g est positive,

par (a), g est continue.

On en déduit : $\forall t \in [a,b]$, $g(t) = 0$, ie $\alpha(t) = \| f(t) \|$.

Mieux : il s'agit du cas d'égalité dans l'inégalité de (d), et donc $\| v(t) \| = 0$, ie $v(t) = 0$.

Bref : $\underline{f(t) = \| f(t) \| u}$.

(f) Dans $\mathbb{R}^2$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, on note $f(t) = (t,1)$

où $t \in [0,1]$. Alors $\|f(t)\| = 1 \quad \forall t \in [0,1]$

et $u = \dfrac{1}{\int_0^1 1\,dt} \cdot \int_0^1 (t,1)\,dt$

$$= \left[\left(\frac{t^2}{2}, t\right)\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

<u>On n'a pas $f(t) \in \mathrm{Vect}(u) \quad \forall t$.</u>