E de dim finie

$X = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$

Comme E est de dim finie, on va montrer X est fermé borné

- On applique la déf de la convergence avec $\varepsilon = 1$.

  $\exists N$ tq $\forall n \geq N,\ \|u_n - \ell\| \leq 1$

  $$\text{donc } \|u_n\| = \|u_n - \ell + \ell\| \leq \|u_n - \ell\| + \|\ell\| \leq \|\ell\| + 1$$

  Ainsi $\forall x \in X,\quad \|x\| \leq \operatorname{Max}\left(\|u_0\|, \dots, \|u_{N-1}\|, \|\ell\| + 1\right)$

  donc <u>X est borné</u>.

- Soit $a \in X^c = E \setminus X$

  alors $a \neq \ell$. Par déf de limite avec $\varepsilon = \frac{\|\ell - a\|}{2}$,

  $\exists N$ tq $\forall n \geq N,\ \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon$

  donc $\|u_n - a\| \geq \varepsilon$ (car $\|\ell - a\| \leq \|\ell - u_n\| + \|u_n - a\|$)

  On note $r = \operatorname{Min}\left(\|u_0 - a\|, \dots \|u_{N-1} - a\|, \frac{\|\ell - a\|}{2}\right)$

  Alors $\forall x \in X,\ \|x - a\| \geq r$

  donc $B(a, r) \subset X^c$: on a montré X^c ouvert

  et donc <u>X est fermé</u>