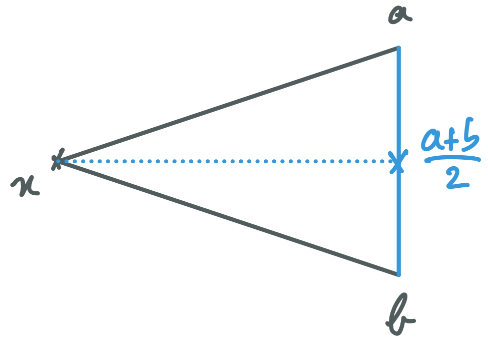
(a)



$$\left\| x - \frac{a+b}{2} \right\|^2 = \left\| \frac{x-a}{2} + \frac{x-b}{2} \right\|^2$$

$$= \frac{1}{4}\|x-a\|^2 + \frac{1}{4}\|x-b\|^2 + \frac{1}{2}\langle x-a \mid x-b \rangle$$

$$\leq \frac{1}{4}\|x-a\|^2 + \frac{1}{4}\|x-b\|^2 + \frac{1}{2}\|x-a\|\,\|x-b\|$$

par l'inég. de Cauchy-Schwarz

$$= \|x-a\|^2 \qquad \text{car } \|x-b\| = \|x-a\|$$

donc $\underline{\left\| x - \frac{a+b}{2} \right\| \leq \|x-a\|}$

L'égalité a lieu $\iff$ il y a égalité dans Cauchy-Schwarz

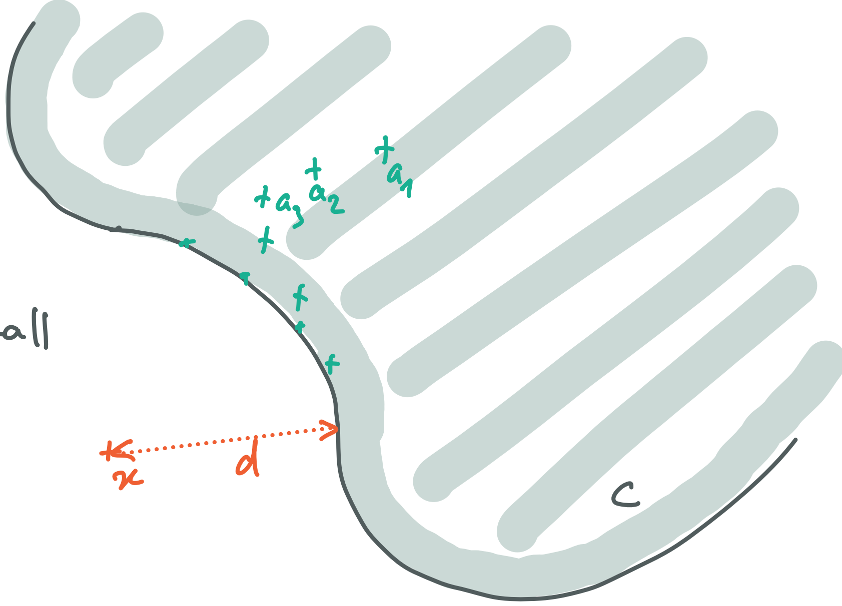
$\iff$ $(x-a)$ et $(x-b)$ colinéaires de même sens

$\iff$ $a = b$ car $\|x-a\| = \|x-b\|$

Mais on a supposé $a \neq b$, donc

$$\underline{\left\| x - \frac{a+b}{2} \right\| < \|x-a\|}$$

(b) • Existence



$$d = d(x, C) = \inf_{a \in C} \|x - a\|$$

Par définition de la borne inf, il existe $(a_n)_n$ suite de C

tq $\quad d \leq \|x - a_n\| \leq d + \frac{1}{n}$

La difficulté est que $(a_n)_n$ n'a pas de raison de converger.

$\forall n, \quad a_n \in \underbrace{C \cap BF(0, 1)}$

fermé et borné dans E de dim finie

donc <u>compact</u>

Ainsi, il existe φ extractrice tq $(a_{\varphi(n)})_n$ converge

dans C. On note a sa limite.

On a : $\forall n \quad d \leq \|x - a_{\varphi(n)}\| \leq d + \frac{1}{\varphi(n)}$

$$\|x - a_{\varphi(n)}\| \to \|x - a\| \qquad d + \frac{1}{\varphi(n)} \to d$$

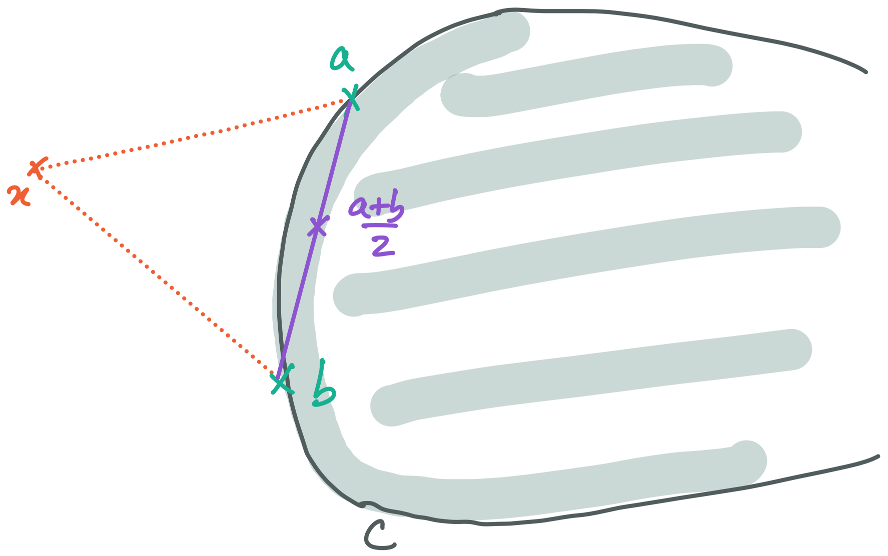
et donc $\|x - a\| = d$

On a montré : $\underline{\exists a \in C, \quad d = \|x - a\|}$

- <u>Unicité</u>.

On suppose qu'il existe $a, b \in A$, $a \neq b$

tq $\|x-a\| = \|x-b\| = d$



En appliquant (a),

$$\left\| x - \frac{a+b}{2} \right\| < \|x-a\| = d$$

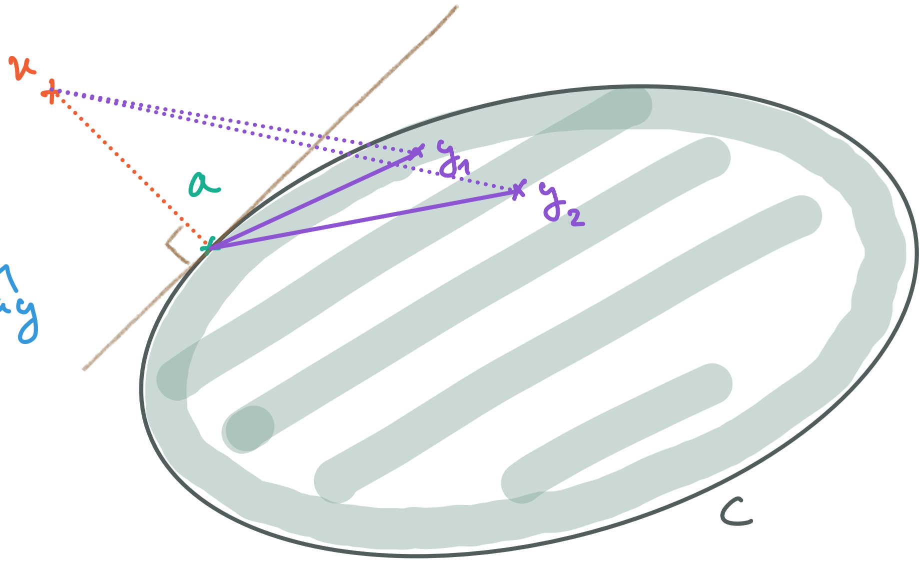
Mais $\frac{a+b}{2} = \frac{1}{2} a + \left(1 - \frac{1}{2}\right) b$

$\in A$ car A convexe.

Cela <u>contredit</u> la minimalité de d.

On a donc montré <u>l'unicité de $a \in A$ tq $d = \|x-a\|$</u>

(c)



Tous les angles $\widehat{xay}$ sont $> 90°$

$$\forall y \in C, \quad \|x-y\|^2 = \|(x-a)+(a-y)\|^2$$

$$= \|x-a\|^2 + \|a-y\|^2 + 2\langle x-a, a-y\rangle$$

$$= \|x-a\|^2 + \|a-y\|^2 - 2\underbrace{\langle x-a, y-a\rangle}_{\leq 0}$$

$$\geq \|x-a\|^2 + \|a-y\|^2$$

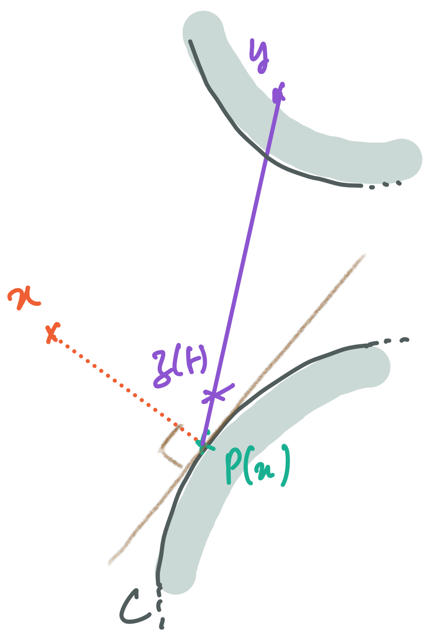
$$\geq \|x-a\|^2$$

avec égalité lorsque $y=a$

On a montré que $\|x-a\| = d(x, C)$, ie $\underline{a = P(x)}$

(d)

On suppose qu'il existe un $y \in C$ tq l'angle $\widehat{xay}$ soit $\leq 90°$.



• $\forall t \in [0,1]$, $\quad z(t) = ty + (1-t)P(x) \in C$

car $y, P(x) \in C$ et C convexe.

Ainsi

$$\|x - P(x)\|^2 \leq \|x - z(t)\|^2$$

$$= \|x - P(x) - t(y - P(x))\|^2$$

$$= \|x - P(x)\|^2 - 2t\langle x - P(x), y - P(x)\rangle + t^2\|y - P(x)\|^2$$

Donc $\quad 0 \leq \underbrace{-2t\underbrace{\langle x - P(x), y - P(x)\rangle}_{>0} + t^2\|y-P(x)\|^2}_{\underset{t\to 0}{\sim} -2t\alpha}$

Cette expression est ≥ 0, et <0 au voisinage de 0,

ce qui est contradictoire.

On a montré que la condition

$\forall y \in C \ \langle x - P(x), y - P(x)\rangle \leq 0$ caractérise $P(x)$

(e) Pour $x, y \in E$:

$\langle x - y, P(x) - P(y)\rangle$

$= \langle x - P(x) + P(x) - P(y) + P(y) - y \ , \ P(x) - P(y)\rangle$

$$= \underbrace{\langle x - P(x), P(x) - \underset{\in C}{P(y)} \rangle}_{\geqslant 0 \text{ par } (d)} + \| P(x) - P(y) \|^2 + \underbrace{\langle P(y) - y, \underset{\in C}{P(x)} - P(y) \rangle}_{\geqslant 0 \text{ par } (d)}$$

$$\geqslant \| P(x) - P(y) \|^2$$

et donc $\| P(x) - P(y) \|^2 \leqslant \langle x - y, P(x) - P(y) \rangle$

$\leqslant \| x - y \| \; \| P(x) - P(y) \|$

par Cauchy-Schwarz

En conséquence, même si $P(x) = P(y)$:

$$\underline{\| P(x) - P(y) \| \leqslant \| x - y \|}$$

Et donc <u>P est continue</u>, car 1-lipschitzienne.