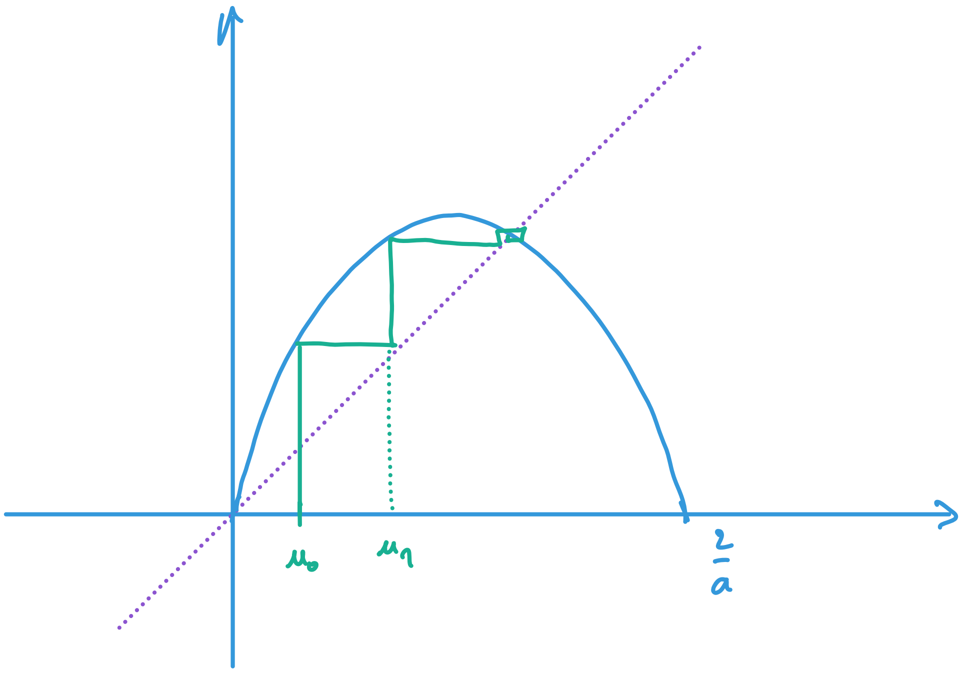
$$f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$
$$M \longmapsto 2M - MAM$$

M_0 qcq, $\quad M_{n+1} = f(M)$

On peut faire le parallèle avec u_0 qcq, $u_{n+1} = g(u_n)$

où $g(x) = 2x - ax^2$

$= -ax\left(x - \frac{2}{a}\right)$



Point fixe de g : 0 et $\frac{1}{a}$

(a) On calcule :

$$I_n - AM_{k+1} = I_n - A(2M_k - M_k A M_k)$$
$$= I_n - 2AM_k + (AM_k)^2$$
$$= (I_n - AM_k)^2$$

Donc, par récurrence :

$$I_n - AM_k = (I_n - AM_0)^{2^k}$$

(b) • Comme la norme est sous-multiplicative,

$$\|I_n - AM_k\| \leq \|I_n - AM_0\|^{2^k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0 \quad \text{car } \|I_n - AM_0\| < 1$$

et donc $AM_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} I_n$

Remarques : On ne sait pas si $(M_k)_k$ converge, donc on ne peut pas conclure directement.

• Par continuité du déterminant, on a donc :

$$\underset{\det(A)\det(M_k)}{\overset{\det(AM_k)}{\shortparallel}} \xrightarrow[k \to +\infty]{} \det I_n = 1$$

donc on ne peut pas avoir $\det(A) = 0$: A est inversible.

(C) Comme A est inversible :

$$M_\varepsilon = A^{-1} A M_\varepsilon$$

$$\xrightarrow[\varepsilon \to +\infty]{} A^{-1} I_n \quad \text{car } AM_\varepsilon \longrightarrow I_n$$

et $M \longmapsto A^{-1}M$ continue
(linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dim finie)

On a montré que $\underline{M_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to +\infty]{} A^{-1}}$.