Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et U l'ensemble des polynômes de degré n, scindés à racines simples. Montrer que U est un ouvert de E.

Soit $P \in U$.

On veut montrer que U est un voisinage de P.

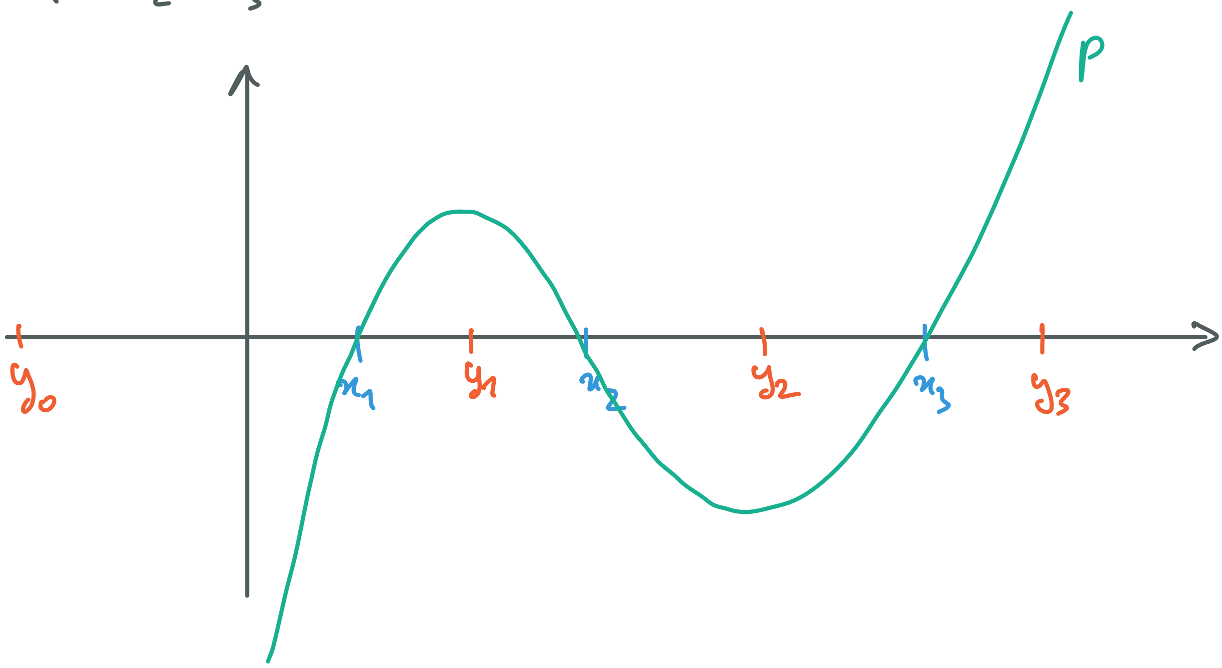
Traitons le cas où $n=3$, à coefficient dominant >0.

Le cas général se traite de façon analogue.

On peut écrire

$$P = \lambda (X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)$$

où $x_1 < x_2 < x_3$



On considère $y_0 < x_1$, $y_1 = \dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y_2 = \dfrac{x_2+x_3}{2}$ et $y_3 > x_3$

de sorte que P est <0 en y_0, >0 en y_1, <0 en y_2, >0 en y_3.

- On définit $$f_i : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}$$ $$Q \longmapsto Q(y_i)$$

Alors f_i est continue parce que linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ de dim finie.

et $f_1^{-1}(]0,+\infty[)$ est ouvert comme image réciproque d'un ouvert par f_1 continue.

De même, $f_0^{-1}(]-\infty,0[)$, $f_2(]-\infty,0[)$ et $f_3(]0,+\infty[)$

Ainsi $V = f_0^{-1}(]-\infty,0[) \cap f_1^{-1}(]0,+\infty[) \cap f_2(]-\infty,0[) \cap f_3(]0,+\infty[)$

est un ouvert

- On a $P \in V$

- Si $Q \in V$, alors $Q(y_0) < 0$ et $Q(y_1) > 0$

  donc, par le th des valeurs intermédiaires, Q s'annule dans $]y_0, y_1[$.

  De même, Q s'annule dans $]y_1, y_2[$ et $]y_2, y_3[$.

  Ainsi, Q admet 3 racines distinctes

  On a établi que $V \subset U$.

Bref, on a trouvé un ouvert contenant P, inclus dans U,

donc U est voisinage de chacun de ses éléments : il est ouvert.