Soit $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}$ forme linéaire.

<u>Mqe φ continue $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Ker} \varphi$ fermé</u>

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose φ continue.

Alors $\operatorname{Ker} \varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$ est fermé, comme

image réciproque d'un fermé par une application continue

$\boxed{\Leftarrow}$ Par contraposée. On suppose φ non continue.

Comme φ est linéaire, cela signifie :

$$\forall C \geq 0, \quad \exists x \in E \ \text{tq} \quad |\varphi(x)| > C \, \|x\|$$

En particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists x_n \in E \ \text{tq} \quad |\varphi(x_n)| > n \, \|x_n\|$$

On note alors $y_n = \dfrac{1}{\varphi(x_n)} x_n - \dfrac{1}{\varphi(x_0)} x_0$

On a :
$$\begin{aligned} \varphi(y_n) &= \varphi\left(\frac{1}{\varphi(x_n)} x_n - \frac{1}{\varphi(x_0)} x_0\right) \\ &= \frac{1}{\varphi(x_n)} \varphi(x_n) - \frac{1}{\varphi(x_0)} \varphi(x_0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $y_n \in \operatorname{Ker} \varphi$

$$\left\| y_n - \frac{1}{\varphi(x_0)} x_0 \right\| = \frac{1}{|\varphi(x_n)|} \|x_n\|$$

$$< \frac{1}{n} \qquad \text{par construction}$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

donc $y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{\varphi(x_0)} x_0$

et $\varphi\left(\frac{1}{\varphi(x_0)} x_0\right) = 1$ donc $\frac{1}{\varphi(x_0)} x_0 \notin \operatorname{Ker} \varphi$.

On a trouvé une suite convergente de $\operatorname{Ker}\varphi$, dont la limite n'est pas dans $\operatorname{Ker}\varphi$, donc $\operatorname{Ker}\varphi$ n'est pas fermé.