$\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ = ensemble des matrices diagonalisables.

(a) <u>Mque $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{C})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$</u> :

$\boxed{\subset}$ cette inclusion est claire.

$\boxed{\supset}$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

A est trigonalisable : $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$, $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$

tq $A = PTP^{-1}$

On note $\varepsilon = \mathrm{Min}\,\{ |\lambda_i - \lambda_j|,\ \lambda_i \neq \lambda_j,\ \lambda_i, \lambda_j \in Sp(A)\}$

de sorte que, $\forall p \geq 2$:

$$\lambda_1 + \frac{\varepsilon}{p},\ \lambda_2 + \frac{\varepsilon}{2p},\ \ldots,\ \lambda_n + \frac{\varepsilon}{np}$$

sont des valeurs 2 à 2 distinctes.

Alors, en notant $A_p = P \begin{pmatrix} \lambda_1 + \frac{\varepsilon}{p} & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n + \frac{\varepsilon}{np} \end{pmatrix} P^{-1}$,

on a $A_p \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ et $A_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} PTP^{-1} = A$

par continuité du produit matriciel.

On a bien montré que <u>$\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$</u>

(b) On note $\Delta_n(\mathbb{C})$ l'ens. des matrices ayant n vp distinctes.

Mq $\mathring{\mathcal{D}_n}(\mathbb{C}) = \Delta_n(\mathbb{C})$

$\boxed{\supset}$

Soit $A \in \Delta_n(\mathbb{C})$. Supposons $A \notin \mathring{\mathcal{D}_n}(\mathbb{C})$.

Alors il existe $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ suite de matrices non diagonalisables

tq $A_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} A$.

Chaque A_p est non diagonalisable, donc admet

au moins une valeur propre double, notée λ_p.

Par continuité de $M \longmapsto \chi_M$, $\chi_{A_p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \chi_A$, et

donc les coefficients des χ_{A_p} sont bornés :

$$\exists M \text{ tq } \forall p\in\mathbb{N}, \forall k\in\{0,\dots,n-1\} \ |a_{k_p}| \leq M$$

en notant $\chi_{A_p}(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_{k_p} X^k$

Si $|\lambda_p| > 1$,

$$|\lambda_p|^n \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_{k_p}|\,|\lambda_p|^k$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_{k_p}|\,|\lambda_p|^{n-1} \qquad \text{car } |\lambda_p|>1$$

et donc $|\lambda_p| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_{k_p}|$

$$\leq nM$$

Donc $\forall p \quad |\lambda_p| \leq \operatorname{Max}(1, nM)$

et donc $(\lambda_p)_p$ est bornée

Par le th de Bolzano-Weierstrass, on peut donc

en extraire $(\lambda_{\varphi(p)})_p$ suite convergente, de limite λ.

Comme les $\lambda_{\varphi(p)}$ sont racines doubles :

$$\chi_{A_{\varphi(k)}}(\lambda_{\varphi(q)}) = \chi'_{A_{\varphi(k)}}(\lambda_{\varphi(k)}) = 0$$

donc à la limite, toujours par continuité de $M \longmapsto \chi_M$:

$$\chi_A(\lambda) = \chi'_A(\lambda) = 0$$

Donc λ est vp double de A. Cela contredit $A \in \Delta_n(\mathbb{C})$

On a donc montré $\mathring{\mathcal{D}_n}(\mathbb{C}) \supset \Delta_n(\mathbb{C})$

$\boxed{C}$ Par contraposée : Soit $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ tq $A \in \Delta_n(\mathbb{C})$

Alors $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$, $\underbrace{\lambda_1 = \lambda_2}_{\text{noté } \lambda}, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ tq

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & & & & (0) \\ & \lambda & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

Posons $$A_p = P \begin{pmatrix} \lambda & 1/p & & & \\ 0 & \lambda & & (0) & \\ & & \lambda_3 & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

Alors $A_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} A$ par continuité du produit matriciel.

Et A_p n'est pas diagonalisable, car l'endomorphisme induit sur l'espace engendré par les 2 premiers vecteurs, et dont la matrice est $\begin{pmatrix} \lambda & \frac{1}{p} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, n'est pas diagonalisable.

On a donc montré que $A \notin \mathring{D}_n(\mathbb{C})$

et finalement que $\underline{\mathring{D}_n(\mathbb{C}) \subset \Delta_n(\mathbb{C})}$

En conclusion, l'intérieur de $D_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices dont les v.p. sont 2 à 2 distinctes.