(a) $\forall t \in [0,1]$,

$$|P_n(t) - 0| = \frac{1}{2^n} t^n$$

$$\leq \frac{1}{2^n} \quad \text{indép de } t$$

donc $\|P_n - 0\|_\infty \leq \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

On a montré $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour $\|.\|_\infty$

(b) $\varphi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ est linéaire
$\qquad P \longmapsto P(2)$

(c'est la forme linéaire d'évaluation en 2).

$\varphi(P_n) = 1$

donc $\varphi(P_n) \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} \varphi(0) = 0$ même si $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

On a montré que <u>φ n'est pas continue</u>

<u>Remarque</u> : Si φ continue, il existe $C > 0$ tq

$$\forall P \quad |\varphi(P)| \leq C \|P\|$$

en particulier $|\varphi(P_n)| \leq C \|P_n\| \quad \forall n$

et donc, à la limite, $1 \leq 0$!

(c) Soit $F = \{ P \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } P(2) = 0 \}$

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ qcq.

On note $\underline{R_n = Q - Q(2)\, P_n}$

Alors $R_n(2) = Q(2) - Q(2)\, P_n(2)$

$= 0$ donc $R_n \in F$

et $\| R_n - Q \|_\infty = |Q(2)| \; \| P_n \|_\infty$

$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

On a trouvé une suite de F qui converge vers Q.

On a montré que F est dense dans $\mathbb{R}[X]$

<u>Remarque</u>: $F = \ker \varphi$ est un sous-ev de $\mathbb{R}[X]$.

On a montré qu'alors F est soit fermé, soit dense

dans $\mathbb{R}[X]$.