Autour du graphe d'une fonction continue

(a) Soit $G = \{(x,y),\ y=f(x),\ x\in\mathbb{R}\}$ le graphe de f.

Soit $(M_n)_n$ une suite de G, convergente de limite $M=(x,y)$

$\forall n,\quad M_n = (x_n, y_n)$

Comme $M_n \xrightarrow[+\infty]{} M$, on a $x_n \xrightarrow[+\infty]{} x$ et $y_n \xrightarrow[+\infty]{} y$

(convergence par coordonnées).

$$\forall n,\quad y_n = f(x_n) \qquad \text{car } M_n \in G$$

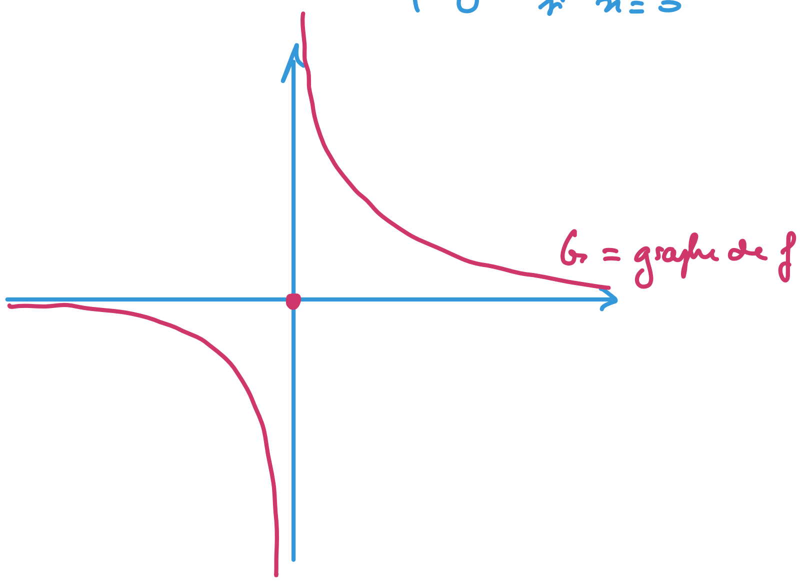
donc, à la limite, par continuité de f :

$$y = f(x)$$

Ainsi $M \in G$. On a montré que <u>G est fermé</u>.

(b) On définit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



La fonction f est discontinue.

G apparaît comme la réunion de 3 fermés, donc est fermé

($G_1 = \{(x, \frac{1}{x}), x > 0\}$ est fermé comme en (a)

$G_2 = \{(0, 0)\}$ est fermé

$G_3 = \{(x, \frac{1}{x}), x < 0\}$)

(c) On suppose f bornée et G fermé.

Raisonnons par l'absurde pour montrer que f est continue en $a \in \mathbb{R}$

On suppose f non continue en a.

Alors il existe $(x_n)_n$ tq $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$

et $f(x_n) \not\xrightarrow[n \to +\infty]{} f(a)$

Mieux : $\exists \varepsilon > 0$, $\exists (x_n)_n$ tq $x_n \xrightarrow[+\infty]{} a$ et $|f(x_n) - f(a)| > \varepsilon$.

La suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée (par hyp sur f)

de réels, donc on peut en extraire une suite convergente :

$\exists b$, $\exists \varphi$ extractrice tq $f(x_{\varphi(n)}) \longrightarrow b$

Notons $M_n = (x_{\varphi(n)}, f(x_{\varphi(n)}))$

Alors $(M_n)_n$ est une suite G, convergente vers (a, b).

Comme G est fermé, on a $(a,b) \in G$ et donc $b = f(a)$

Mais $|f(x_{\varphi(n)}) - f(a)| > \varepsilon$ $\forall n$

donc $f(x_{\varphi(n)}) \not\to f(a)$ donc $b \neq f(a)$

<u>Contradiction</u>.

On a donc montré que f est continue en tout $a \in \mathbb{R}$.