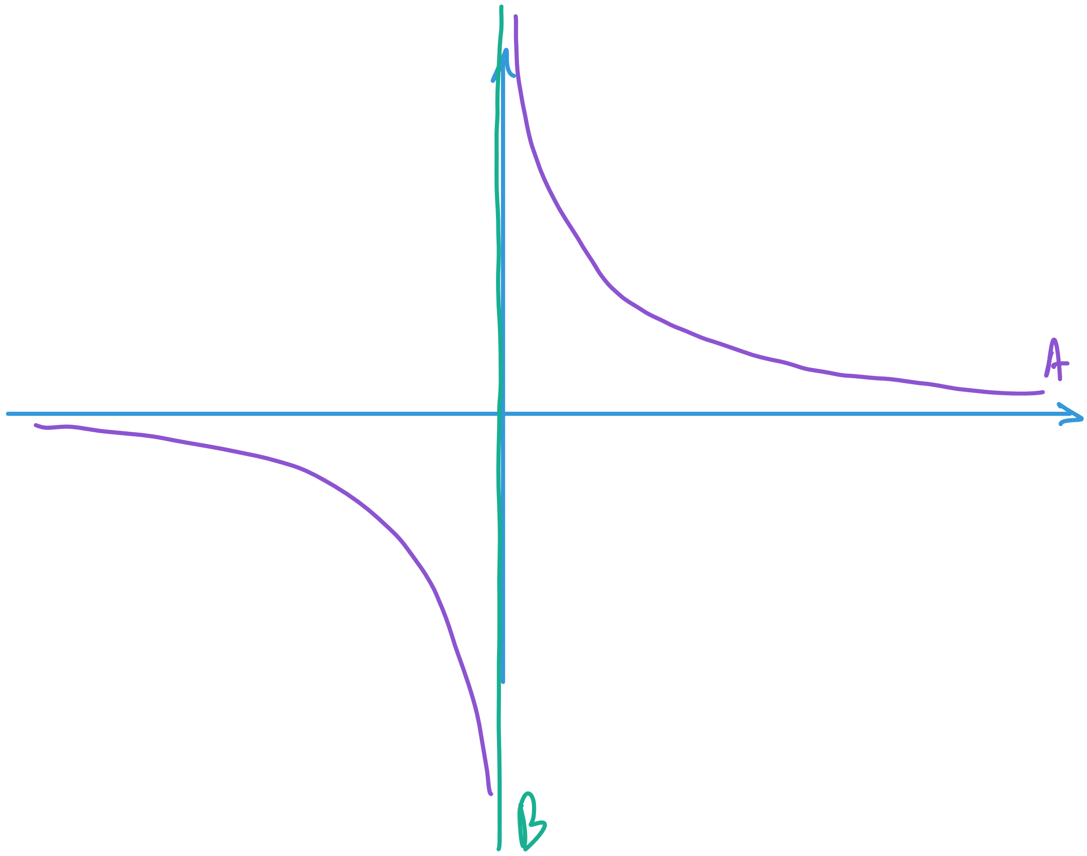
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy = 1\}$ $\qquad B = \{0\} \times \mathbb{R}$



(a) • <u>Montrons que A est fermé par caractérisation séquentielle</u>

Soit $(u_n)_n$ une suite convergente d'éléments de A.

$\forall n,\ u_n = (x_n, y_n)$ et $x_n y_n = 1$.

Or la convergence de $(u_n)_n$ est celle des suites coordonnées $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$. On note x (resp. y) la limite de $(x_n)_n$ (resp. de $(y_n)_n$).

$\forall n \qquad x_n y_n = 1$

donc, à la limite, $\quad xy = 1$.

En conclusion, <u>A est fermé</u>

<u>Remarque</u>. On peut aussi introduire

$$u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto xy$$

qui est continue (polynomiale en dim finie)

et $A = u^{-1}(\{1\})$ est donc fermé.

- $B = \{0\} \times \mathbb{R}$ est fermé comme produit de fermés.

<u>Plus précisément</u>:

$\{0\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ est fermé dans $\mathbb{R}$

donc $\{0\} \times \mathbb{R}$ est fermé dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pour la norme produit. Comme les espaces envisagés sont de dimension finie, cette propriété "fermé" ne dépend pas de la norme.

(b) $A + B = \{a+b,\ a \in A,\ b \in B\}$

$= \{(x, y+z),\ xy = 1 \text{ et } z \in \mathbb{R}\}$

On note $u_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$

Alors $\forall n$, $u_n \in A+B$

et $u_n \longrightarrow (0,0) \notin A+B$

donc A+B n'est pas fermé

Remarque : on peut montrer que $A+B = \mathbb{R}^2 \setminus B$

$= \}(x,y), x \neq 0\{$

et donc A+B est ouvert.