$E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, $\qquad \|\cdot\|_\infty$

$A = \{ f \in E \text{ tq } f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)\,dt \geq 1 \}$

(a) <u>Mque A est fermé par caractérisation séquentielle</u>

Soit $(f_n)_n$ une suite convergente d'éléments de A.

On note f sa limite : $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

ie $(f_n)_n$ converge uniformément vers f

- $\forall n \quad |f_n(0) - f(0)| \leq \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

donc $\underbrace{f_n(0)}_{=0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)$

donc $f(0) = 0$

<u>Rmq</u>: on peut aussi parler de convergence simple, donc de convergence de $(f_n(0))_n$.

- $$\left| \int_0^1 f_n(t)\,dt - \int_0^1 f(t)\,dt \right|$$
$$= \left| \int_0^1 f_n(t) - f(t)\,dt \right|$$
$$\leq \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\,dt$$
$$\leq \int_0^1 \|f_n - f\|_\infty\,dt$$
$$= \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,dt$

or $\forall n \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt \geq 1$

donc, par passage à la limite dans les inégalités

larges, on a aussi $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt \geq 1$

Rmq : on peut aussi justifier que $\int_0^1 f_n \to \int_0^1 f$

par convergence uniforme sur un segment.

On a donc montré que $f \in A$, donc que A est fermé

Remarque :

On peut aussi introduire les deux applications linéaires :

$$u : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array} \qquad v : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_0^1 f(t)\,dt \end{array}$$

Comme $|u(f)| = |f(0)|$

$\leq \|f\|_\infty$

et $|v(f)| = \left|\int_0^1 f(t)\,dt\right|$

$\leq \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,dt$

$\leq \displaystyle\int_0^1 \|f\|_\infty\,dt$

$= \|f\|_\infty$

Les applications linéaires u et v sont continues.

Et donc $A = u^{-1}(\{0\}) \cap v^{-1}([1,+\infty[)$ est fermé.

(b) <u>Montrons par l'absurde que $\|f\|_\infty > 1 \quad \forall f \in A$</u>

On suppose $\exists f \in A$ tq $\|f\|_\infty \leq 1$

On applique la définition de la continuité de f en 0, avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

$\exists \alpha > 0, \alpha < 1$ tq $\forall t \in [0, \alpha[, \; |f(t)| = |f(t) - f(0)| \leqslant \varepsilon = \frac{1}{2}$

Alors:

$$\left| \int_0^1 f(t)\, dt \right| \leq \int_0^1 |f(t)|\, dt$$
$$= \int_0^\alpha \frac{1}{2} dt + \int_\alpha^1 \|f\|_\infty \, dt$$
$$\leq \frac{\alpha}{2} + (1-\alpha)$$
$$< \alpha + (1-\alpha)$$
$$= 1$$

Ce qui contredit $\int_0^1 f(t)\, dt \geqslant 1$.

En conclusion : <u>$\forall f \in A, \quad \|f\|_\infty > 1$</u>

(c) • Par ce qui précède, $\forall f \in A, \; \|f - 0\|_\infty > 1$ indép de f

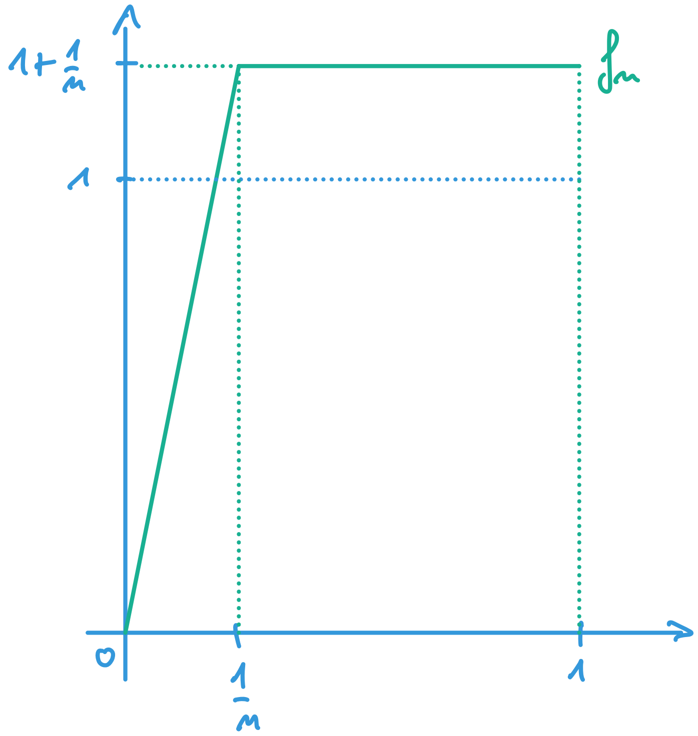
donc $\inf_{f \in A} \|f - 0\|_\infty \geqslant 1$

car la borne inf est le plus grand des minorants.

Ainsi <u>$d(0_E, A) \geqslant 1$</u>

• Pour montrer que $d(0_E, A) = 1$, on construit $(f_n)_n$ une suite de A tq $\|f_n - 0_E\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

Définissons f_n par son graphe : pour $n \geq 1$:



On a $f_n(0) = 0$

et $$\int_0^1 f_n(t)\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1+n}{2n^2} + 1 - \frac{1}{n^2}$$

$$= 1 + \frac{n-1}{2n^2} \geq 1 \qquad \forall n \geq 1$$

Ainsi $f_n \in A$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $$d(0_E, A) \leq \|f_n - 0_E\|_\infty$$

$$= 1 + \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

donc $\underline{d(0_E, A) \leq 1}$

On a montré que $\underline{d(0_E, A) = 1}$