Soit E un espace vectoriel réel, et $N : E \to \mathbb{R}_+$ une application qui vérifie :

$$\forall x \in E,\ N(x) = 0 \implies x = 0$$
$$\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$$

Montrer que N définit une norme sur E si et seulement si l'ensemble :

$$B = \{x \in E,\ N(x) \leqslant 1\}$$

est une partie convexe de E.

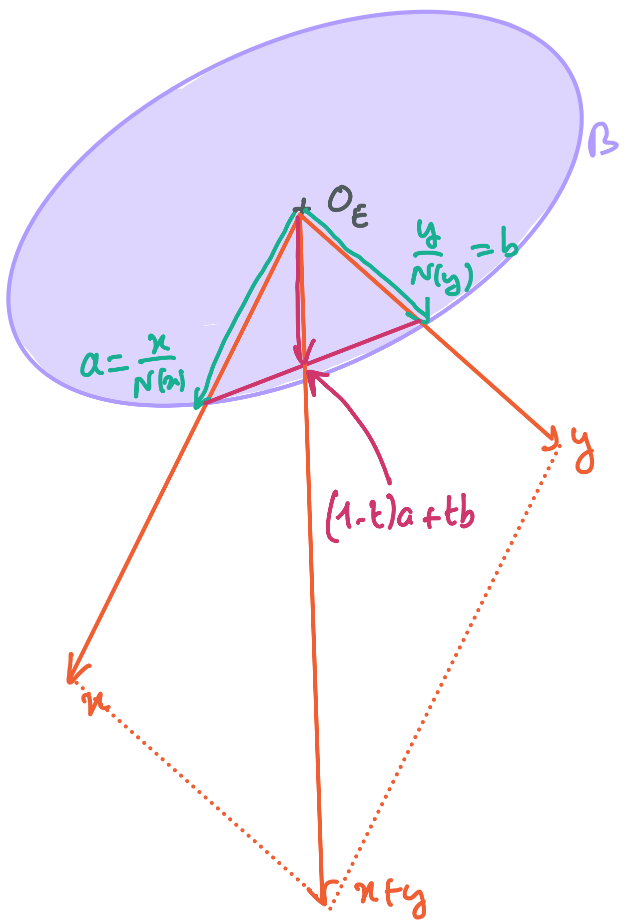
$\boxed{\Rightarrow}$ Si N est une norme, B est $BF(0,1)$ qui est convexe

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose B convexe.

Montrons que N est une norme. Les axiomes de positivité, séparation et homogénéité sont supposés vrais dans l'énoncé.

Il reste à vérifier l'inégalité triangulaire

Soit $x, y \in E$, (supposés $\neq 0$, sinon c'est trivial)



On note $a = \frac{x}{N(x)}$ et $b = \frac{y}{N(y)}$, on a $a, b \in B$

par convexité, $\forall t \in [0,1]$, $(1-t)a + tb \in B$

$$(1-t)\frac{x}{N(x)} + t\frac{y}{N(y)} = \frac{(1-t)N(y)\,x + tN(x)\,y}{N(x)N(y)}$$

on choisit t tq $(1-t)N(y) = tN(x)$

ie $t = \frac{N(y)}{N(x)+N(y)} \in [0,1]$

En particulier pour $t = \frac{N(y)}{N(x)+N(y)}$, on a donc :

$$\left(1 - \frac{N(y)}{N(x)+N(y)}\right)\frac{x}{N(x)} + \frac{N(y)}{N(x)+N(y)}\frac{y}{N(y)} \in B$$

ie $$N\left(\left(1 - \frac{N(y)}{N(x)+N(y)}\right)\frac{x}{N(x)} + \frac{N(y)}{N(x)+N(y)}\frac{y}{N(y)}\right) \leq 1$$

$$\Vert$$

$$N\left(\frac{x}{N(x)+N(y)} + \frac{y}{N(x)+N(y)}\right)$$

$$\Vert$$

$$\frac{1}{N(x)+N(y)}N(x+y)$$ par homogénéité.

On a montré $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

et donc N est une norme.