$N_1(f) = \|f + f'\|_\infty$ et $N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$

(a) $E = \{ f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}),\ f(0) = 0 \}$

$= \operatorname{Ker} \varphi$ où $\varphi : \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$
$f \longmapsto f(0)$

est un e.v. comme noyau d'une forme linéaire

(b) On sait déjà que $\|.\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$

- Pour $f \in E$, $f + f'$ est continue sur $[0,1]$ segment
  donc $N_1(f)$ existe
- Pour $f \in E$, $N_1(f) = \|f + f'\|_\infty \geq 0$
- Soit $f \in E$ tq $N_1(f) = 0$ ie $\|f + f'\|_\infty = 0$
  Alors $f + f' = 0$ car $\|.\|_\infty$ est une norme
  donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = \lambda e^{-x}$
  par résolution de l'équation différentielle.
  Mais $f \in E$ donc $f(0) = 0$ donc $\lambda = 0$, ie $f = 0$
- Soit $f, g \in E$,

$$N_1(f+g) = \|(f+g) + (f+g)'\|_\infty$$
$$\leq \|f + f'\|_\infty + \|g + g'\|_\infty$$
car $\|.\|_\infty$ est une norme
$$= N_1(f) + N_2(f)$$

- Soit $f \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$N_1(\lambda f) = \| \lambda f + (\lambda f)' \|_\infty$$
$$= |\lambda| \, \| f + f' \|_\infty$$
$$= |\lambda| \, N_1(f)$$

On a montré que <u>N_1 est une norme</u>.

- N_2 est aussi une norme

(Justification non rédigée ici)

(c)

- Pour $f \in E$,

$$\forall t \in [0,1], \quad |(f+f')(t)| \leq |f(t)| + |f'(t)|$$
$$\leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$
$$= N_2(f) \quad \text{indép de } t$$

donc $\underline{N_1(f) \leq N_2(f)}$

- On veut maintenant majorer $N_2(f)$ à l'aide de $N_1(f)$.

Soit $f \in E$.

Notons $g = f + f'$.

Résolvons l'équation différentielle $y' + y = g$ (E)

en effectuant le changement de fonction inconnue

$$y(t) = z(t)\, e^{-t}$$

$$y'(t) = z'(t)\, e^{-t} - z(t)\, e^{-t}$$

On a :

y sol de $E \iff \forall t \in [0,1]\ z'(t)\, e^{-t} = g(t)$

$$\iff \forall t \in [0,1],\ z'(t) = g(t)\, e^{t}$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall t \in [0,1]\ z(t) = \lambda + \int_0^t g(u)\, e^{u}\, du$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall t \in [0,1]\ y(t) = \lambda e^{-t} + \int_0^t g(u)\, e^{u-t}\, du$$

f est l'une des solutions de (E), celle tq $f(0) = 0$

donc $\underline{f(t) = \int_0^t (f + f')(u)\, e^{u-t}\, du}$

On a donc, $\forall t \in [0,1]$:

$$|f(t)| \leq \int_0^t |(f+f')(u)|\ e^{u-t}\, du$$

$$\leq \|f+f'\|_\infty \int_0^t e^{u-t}\, du$$

$$\leq \|f+f'\|_\infty \int_0^t 1\, du$$

$$\leq \|f+f'\|_\infty \quad \text{car } t \leq 1$$

indep de t

et donc $\|f\|_\infty \leq \|f+f'\|_\infty$.

Par suite

$$\begin{aligned} N_2(f) &= \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \\ &= \|f\|_\infty + \|f'+f-f\|_\infty \\ &\leq 2\|f\|_\infty + \|f'+f\|_\infty \\ &\leq 3\|f+f'\|_\infty \\ &= 3\, N_1(f) \end{aligned}$$

Finalement, $N_1(f) \leq N_2(f) \leq 3N_1(f)$

donc <u>N_1 et N_2 sont équivalentes</u>.