$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \qquad N_\infty(P) = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|$$

(a) <u>Mque N_1 définit une norme sur E</u>

- Pour $P \in E$, $P^{(k)}$ est nul pour k assez grand

  donc la somme est en fait finie et <u>$N_1(P)$ existe</u>

- Pour $P \in E$, $N_1(P) \geqslant 0$

- Soit $P \in E$ tq $N_1(P) = 0$ ie $\sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| = 0$

  Somme nulle de termes positifs donc $\forall k \in \mathbb{N}$,

  $P^{(k)}(0) = 0$ Ainsi 0 est racine de P d'ordre k $\forall k$

  Or, si $P \neq 0$, l'ordre d'une racine est $\leqslant \deg(P)$

  donc $P = 0$

- Soit $P, Q \in E$. Alors (sommes finies):

$$\begin{aligned} N_1(P+Q) &= \sum_{k=0}^{+\infty} |(P+Q)^{(k)}(0)| \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0) + Q^{(k)}(0)| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| + |Q^{(k)}(0)| \\ &= N_1(P) + N_1(Q) \end{aligned}$$

- Soit $P \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors (sommes finies):

$$\begin{aligned} N_1(\lambda P) &= \sum_{k=0}^{+\infty} |(\lambda P)^{(k)}(0)| \\ &= |\lambda| \, N_1(P) \end{aligned}$$

On a montré que <u>N_1 est une norme</u>.

Mque N_∞ est une norme

- Pour $P \in E$, $|P|$ est continue sur le segment $[-1,1]$

  donc $N_\infty(P)$ existe bien

- Pour $P \in E$, $N_\infty(P) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)| \geq 0$
- Soit $P \in E$ tq $N_\infty(P) = 0$ ie $\sup_{t \in [-1,1]} |P(t)| \geq 0$.

  Donc $\forall t \in [-1,1]$, $P(t) = 0$. Ainsi P admet

  une infinité de racines, donc $P = 0$

- Soit $P, Q \in E$.

  $\forall t \in [-1,1]$, $|(P+Q)(t)| \leq |P(t)| + |Q(t)|$

  $\leq N_\infty(P) + N_\infty(Q)$ indep de t

  donc $N_\infty(P+Q) \leq N_\infty(P) + N_\infty(Q)$

  par définition de la borne sup.

- Soit $P \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

  $$N_\infty(\lambda P) = \sup_{t \in [-1,1]} |\lambda P(t)|$$
  $$= |\lambda| \, N_\infty(P)$$

  par les propriétés de la borne supérieure.

On a montré que N_∞ est une norme.

(b) • Pour $k < n$,

$$P_n^{(k)} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n} X^{n-k}$$

donc $P_n^{(k)}(0) = 0$

• Pour $k = n$

$$P_n^{(n)} = \frac{n(n-1)\cdots 1}{n} X^0$$

$$= (n-1)!$$

donc $P_n^{(n)}(0) = (n-1)!$

• Pour $k \geq n+1$,

$P_n^{(k)} = 0$ donc $P_n^{(k)}(0) = 0$

Par suite, $N_1(P_n) = (n-1)! \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

et donc $(P_n)_n$ n'est pas convergente pour N_1.

• $\forall t \in [-1, 1]$, $|P_n(t)| = \frac{1}{n} |t|^n$

$\leq \frac{1}{n}$ indép. de t

avec égalité pour $t = 1$

donc $N_\infty(P_n) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N_\infty} 0$: $(P_n)_n$ est convergente pour N_∞

(c) Par suite, N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.