

320.6

a) Soit $X = (x_i)_{1 \leq i \leq m} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \text{On a } X^T H X &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m x_i h_{ij} x_j \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{x_i x_j}{i+j-1} \end{aligned}$$

b) $[H^T]_{i,j} = [H]_{j,i} = \frac{1}{i+j-1} = [H]_{i,j}$ donc H est symétrique

$$\text{On a } \frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1} dt$$

$$\text{Donc } \frac{1}{i+j-1} = \int_0^1 t^{i+j-2} dt$$

$$\begin{aligned} \text{D'après a), } X^T H X &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m x_i x_j \int_0^1 t^{i+j-2} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m x_i x_j t^{i-1} t^{j-1} dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^m x_i t^{i-1} \right)^2 dt \end{aligned}$$

Donc $X^T H X \geq 0$ (intégrale d'une fonction positive ou nulle: par positivité de l'intégrale)

Supposons $X^T H X = 0$

ie $\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^m x_i t^{i-1} \right)^2 dt = 0$ intégrale nulle d'une fonction continue et positive.

Donc $\forall t \in [0, 1], \left(\sum_{i=1}^m x_i t^{i-1} \right)^2 = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^m x_i t^{i-1} = 0$

Le polynôme possède une infinité de racines donc tous ses coefficients sont nuls.

Ainsi $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Conclusion: H symétrique et $X^T H X$ définie positive

Donc $H \in S_m^{++}(\mathbb{R})$.