Existence d'une racine carrée symétrique positive d'une matrice symétrique positive

- $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ donc par le théorème spectral et la caractérisation spectrale de la positivité :

$$\exists P \in O_n(\mathbb{R}),\ \lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}_+ \quad \text{tq} \quad S = P \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\text{notée } D} P^T$$

- On note $R = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^T$

- On a R symétrique (car $R^T = R$)

  positive (car ses v.p $\sqrt{\lambda_1} \dots \sqrt{\lambda_n}$ sont positives)

  tq $R^2 = S$ (c'est un calcul direct)

Ainsi R convient.

Unicité de la racine carrée symétrique positive d'une matrice symétrique positive (version matricielle)

- Soit $L \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ polynôme d'interpolation de Lagrange tq

$$\forall i \quad L(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$$

Remarque : si les vp ne sont pas distinctes, il n'y a que k conditions d'interpolation et $L \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$

On calcule : $L(S) = L(PDP^T)$

$= P\,L(D)\,P^T$ justif classique, polynôme de matrice

$= P \begin{pmatrix} L(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & L(\lambda_n) \end{pmatrix} P^T$ justif classique

$= P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^T$

$= R$

- Notons T une matrice convenant : $T \in S_n^+(\mathbb{R})$ et $T^2 = S$

Comme $T^2 = S$, T commute avec S, donc avec $L(S) = R$

donc T commute avec R.

Mais T et R sont diagonalisables par le th spectral,

donc par exercice classique (qu'il faut connaître !)

elles sont co-diagonalisables :

Il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ et D_1, D_2 diagonales à coeffs $\geqslant 0$

tq : $T = Q D_1 Q^{-1}$ et $R = Q D_2 Q^{-1}$

Mais comme $T^2 = R^2$, on a $D_1^2 = D_2^2$.

Par positivité des coeff diagonaux, $D_1 = D_2$ et donc $\underline{T = R}$

Unicité de la racine carrée symétrique positive d'une matrice symétrique positive (version vectorielle)

Supposons $S = R^2$ où $S, R \in S_n^+(\mathbb{R})$

Notons $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à S : $s \in S^+(\mathbb{R}^n)$

$r \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à R : $r \in S^+(\mathbb{R}^n)$

- Par le th spectral, $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in Sp(s)} E_\lambda(s)$

  Or $r \circ s = r^3 = s \circ r$ donc les $E_\lambda(s)$ sont stables par r.

  La connaissance de r est la connaissance des endomorphismes induits r_λ par r sur $E_\lambda(s)$

- r_λ est autoadjoint positif, car r l'est, donc par le th spectral, il existe $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ base orthonormée de $E_\lambda(s)$, et $\forall k \in \{1, \dots, p\}$, $r_\lambda(e_k) = \mu_k e_k$

  où $\mu_k \geq 0$ (car $Sp(r_\lambda) \subset \mathbb{R}_+$)

  On a alors :
  $$\begin{aligned} \lambda e_k &= s(e_k) \\ &= r^2(e_k) \\ &= \mu_k^2 e_k \end{aligned}$$

  donc $\lambda = \mu_k^2$ et donc $\mu_k = +\sqrt{\lambda}$ par positivité

  Ainsi $r_\lambda = \sqrt{\lambda}\, \mathrm{Id}_{E_\lambda(s)}$

On a donc montré l'unicité de chaque r_λ, donc de r, donc R.