Remarquons d'abord que la géométrie du produit matriciel donne :

$$M = \Big(\;\Big)\big(\quad\big) + \Big(\;\Big)\big(\quad\big) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

On peut penser à l'ex. classique des matrices de rang 1 qui s'écrivent $UV^T$ où $U,V$ sont des colonnes non nulles.

Ici, on a directement $\mathrm{Im}\, M \subset \mathrm{Vect}(A,B)$, ce qui peut aider la compréhension.

(a) $$\begin{aligned} M^T &= (AB^T + BA^T)^T \\ &= BA^T + AB^T \\ &= M \end{aligned}$$

Donc $M$ est symétrique réelle donc par le th. spectral $M$ est diagonalisable (et ses espaces propres sont orthogonaux)

(b) Soit $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} X \in \mathrm{Ker}\, M &\iff MX = 0 \\ &\iff AB^TX + BA^TX = 0 \end{aligned}$$

$A^TX = \langle A, X\rangle$ scalaire

$$\begin{aligned} &\iff \langle B,X\rangle A + \langle A,X\rangle B = 0 \\ &\iff \langle B,X\rangle = 0 \text{ et } \langle A,X\rangle = 0 \end{aligned}$$

car $(A,B)$ libre

$$\iff X \in \mathrm{Vect}(A,B)^{\perp}$$

On a montré que $\underline{\mathrm{Ker}\, M = \mathrm{Vect}(A,B)^\perp}$

Avec $A, B$ non colinéaires donc $\dim \mathrm{Vect}(A,B) = 2$

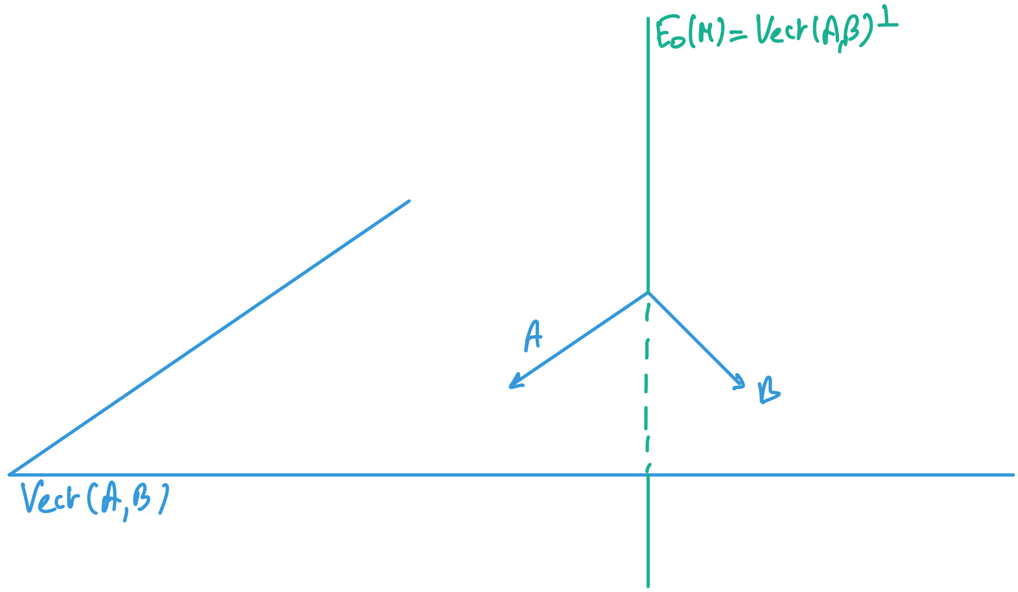
Par le th du rang, $\mathrm{rg}\, M = n - \dim \mathrm{Vect}(A,B)^\perp$

$$= 2$$

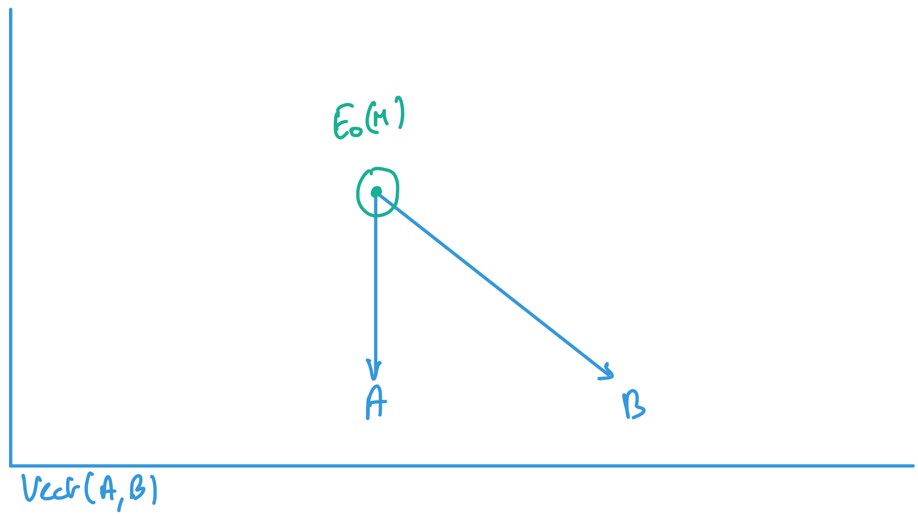
(c) • Puisque $\dim \mathrm{Ker}(M) = n-2$ et que $M$ est diagonalisable,

<u>0 est vp de $M$, de multiplicité $n-2$</u>

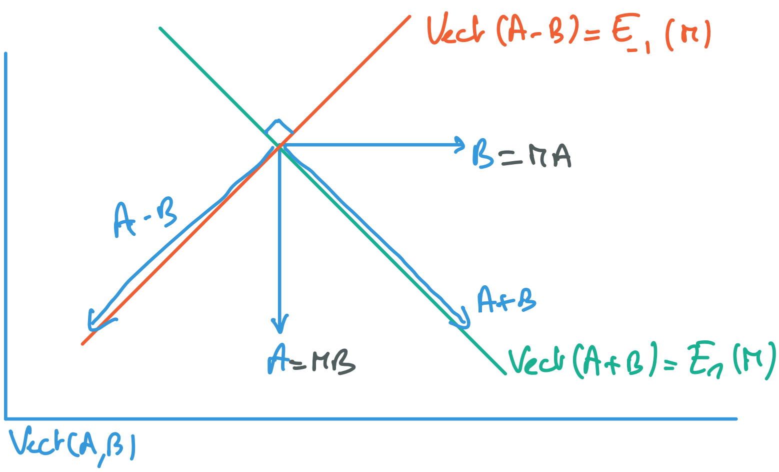
• Par le th spectral, il reste 2 vp simples ou une vp doubles, et le(s) espace(s) propre(s) restant sont dans $E_0(M)^\perp = \mathrm{Vect}(A,B)$




On peut ne regarder que ce qui se passe dans le plan




- Commençons par traiter le cas où $(A, B)$ est orthonormée




On calcule $MA = AB^TA + BA^TA$

$= A.0 + B.1$ car $\langle B, A\rangle = 0$ et $\|A\|^2 = 1$

de même $MB = A$

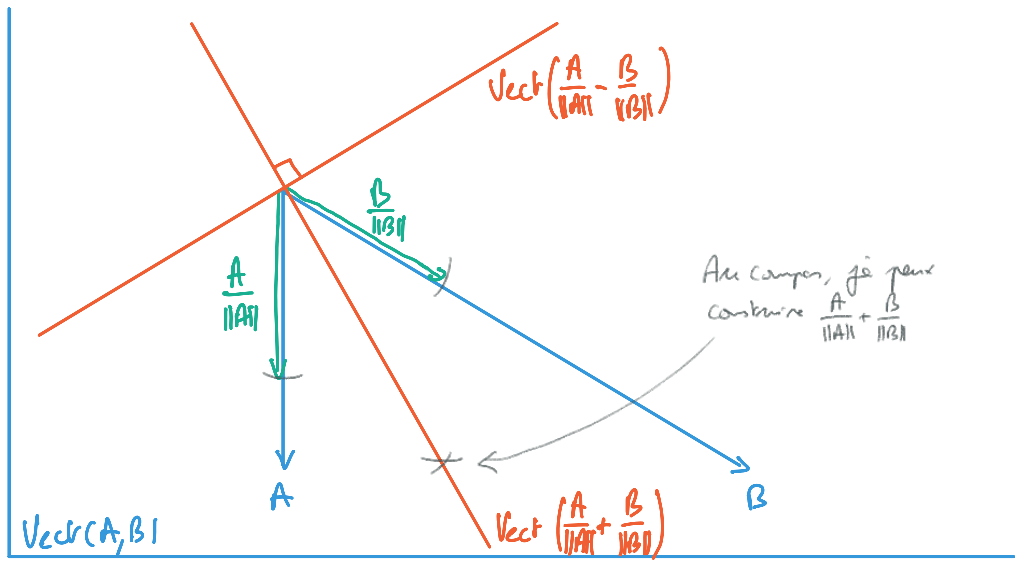
On a donc $M(A+B) = A+B$

et $M(A-B) = -(A-B)$

donc $1$ et $-1$ sont vp et $\left\{\begin{array}{l} E_1(M) = \mathrm{Vect}(A+B) \\ E_{-1}(M) = \mathrm{Vect}(A-B) \end{array}\right.$

- <u>Dans le cas général</u>

On s'intéresse aux bissectrices de $(\vec{A}, \vec{B})$.




<u>On calcule:</u> $* \; M\left(\frac{A}{\|A\|} + \frac{B}{\|B\|}\right) = AB^T\left(\frac{A}{\|A\|} + \frac{B}{\|B\|}\right) + BA^T\left(\frac{A}{\|A\|} + \frac{B}{\|B\|}\right)$

$$= \frac{A}{\|A\|}\langle B, A\rangle + A\|B\| + B\|A\| + \frac{B}{\|B\|}\langle A, B\rangle$$

$$= \left(\langle A, B\rangle + \|A\|\|B\|\right)\left(\frac{A}{\|A\|} + \frac{B}{\|B\|}\right)$$

donc $\frac{A}{\|A\|} + \frac{B}{\|B\|}$ valeur propre associée à $\langle A, B\rangle + \|A\|\|B\|$

$* \; M\left(\frac{A}{\|A\|} - \frac{B}{\|B\|}\right) = AB^T\left(\frac{A}{\|A\|} - \frac{B}{\|B\|}\right) + BA^T\left(\frac{A}{\|A\|} - \frac{B}{\|B\|}\right)$

$$= \frac{A}{\|A\|}\langle B, A\rangle - A\|B\| + B\|A\| - \frac{B}{\|B\|}\langle A, B\rangle$$

$$= \left(\langle A, B\rangle - \|A\|\|B\|\right)\left(\frac{A}{\|A\|} - \frac{B}{\|B\|}\right)$$

donc $\frac{A}{\|A\|} - \frac{B}{\|B\|}$ valeur propre associée à $\langle A, B\rangle - \|A\|\|B\|$