(a) Comme f est une isométrie, f préserve la norme

Il s'agit de redémontrer ici que f préserve aussi le produit scalaire. On s'appuie sur l'identité de polarisation

Pour $x, y \in E$,

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \frac{1}{2}\left(\|f(x)+f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right)$$

par polarisation

$$= \frac{1}{2}\left(\|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right)$$

par linéarité

$$= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$

car f préserve la norme

$$\underline{= \langle x, y \rangle}$$

par polarisation.

(b) • f isométrie de E et $F = E_1(f)$ est stable par f

donc $\underline{F^\perp = G \text{ est stable par } f}$.

• On note $g : G \longrightarrow G$

$x \longmapsto x - f(x)$

* g est bien à valeurs dans G par le point précédent

* Si $x \in \ker g$, alors $x = f(x)$ donc $x \in E_1(f) = F$

Mais aussi $x \in G$ par déf, donc $x \in F^\perp$

donc $x = 0$

* Ainsi g est un <u>endomorphisme injectif</u> d'un espace de dim. finie donc <u>automorphisme de G</u>.

(c) • Soit $x \in E$. On calcule :

$$g_n \circ (Id - f)(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k (x - f(x))$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k(x) - f^{k+1}(x)$$

$$= \frac{1}{n} (x - f^n(x)) \quad \text{par télescopage}$$

Donc $\underline{g_n \circ (Id - f) = \frac{1}{n} (Id - f^n)}$

• Pour $x \in G$, $\exists!\, t \in G$ tq $x = g(t)$ par (b). Donc

$$g_n(x) = g_n \circ (Id - f)(t)$$

$$= \frac{1}{n} (t - f^n(t))$$

On a donc

$$\|g_n(x)\| \leq \frac{1}{n} (\|t\| + \|f^n(t)\|) \quad \text{par inég. triang.}$$

$$= \frac{1}{n} (\|t\| + \|t\|) \quad \text{par récurrence, avec } f \text{ isométrie}$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

donc $\underline{g_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \text{pour } x \in G}$

(d) Soit $x \in E$. On écrit $x = \underbrace{p(x)}_{\in F} + \underbrace{(x - p(x))}_{\in G = F^\perp}$

avec les notations de l'énoncé.

$$
\begin{aligned}
g_n(x) &= g_n(p(x)) + g_n(x - p(x)) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k(p(x)) + g_n(x-p(x)) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} p(x) + g_n(x-p(x))
\end{aligned}
$$

par récurrence, $f^k(p(x)) = p(x)$ car $p(x) \in F = E_1(f)$

$$= p(x) + g_n(x-p(x))$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} p(x) \qquad \text{par (c)}$$

(e) Soit f canoniquement associé à A. On reconnaît la rotation d'axe dirigé et orienté par e_3, d'angle θ.

On suppose $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, donc $F = E_1(f) = \mathrm{Vect}(e_3)$.

La projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(e_3)$ a pour matrice

$P = \left(\begin{array}{cc:c} \multicolumn{2}{c:}{\multirow{2}{*}{0}} & 0 \\ & & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. D'après (d), on a $\forall X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$\frac{1}{n}(I_3 + A + \dots + A^{n-1})X \xrightarrow[n\to+\infty]{} PX$$

En particulier pour $X = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, donc, en le montrant pour chaque colonne, on a montré :

$$\frac{1}{n}(I_3 + A + \dots + A^{n-1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P = \left(\begin{array}{cc:c} \multicolumn{2}{c:}{\multirow{2}{*}{0}} & 0 \\ & & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$