

On note E l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. On définit sur $E \times E$ l'application φ par :

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 (fg + f'g')$$

On définit les deux ensembles :

$$\begin{aligned} V &= \{f \in E \text{ t.q. } f(0) = f(1) = 0\} \\ W &= \{f \in E \text{ t.q. } f'' \text{ existe et } f'' = f\} \end{aligned}$$

- (a) Montrer que φ est bien un produit scalaire sur E .
- (b) Montrer que W est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, et en donner une base.
- (c) Montrer que V est le supplémentaire orthogonal de W dans E . Donner l'expression de la projection orthogonale sur W .
- (d) Pour $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, on définit :

$$E_{\alpha, \beta} = \{f \in E \text{ t.q. } f(0) = \alpha, f(1) = \beta\}$$

Calculer $\inf_{f \in E_{\alpha, \beta}} \left(\int_0^1 (f^2 + f'^2) \right).$

(a) φ est une forme bilinéaire symétrique par linéarité de l'intégrale et de la dérivation, bilinéarité et commutativité du produit.

φ est positive car $\varphi(f, f) = \int_0^1 f^2(t) + f'^2(t) dt \geq 0$

et φ est définie positive car si $\varphi(f, f) = 0$,

$\int_0^1 f^2(t) + f'^2(t) dt = 0$, intégrale nulle d'une fonction

continue et positive donc $\forall t \in [0, 1] \quad f^2(t) + f'^2(t) = 0$

Somme nulle de carrés donc $\forall t \in [0, 1], f(t) = 0$

On a montré que φ est un produit scalaire.

(b) • Notons $\mathcal{D}^2$ les fonctions deux fois dérivables sur $[0,1]$.

$$W = \text{Ker}(u) \quad \text{où} \quad u: \mathcal{D}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{[0,1]} \quad \text{linéaire}$$

$$f \longmapsto f'' - f$$

donc W est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}^2$, donc de E

- Les éléments de W sont les solutions de l'équation différentielle linéaire, homogène d'ordre 2 à coefficients constants $y'' - y = 0$ donc

$$W = \text{Vect}(\underbrace{x \mapsto e^x}_{\text{notée } w_1}, \underbrace{x \mapsto e^{-x}}_{\text{notée } w_2})$$

(c) Remarque: W est de dimension finie, donc $W \oplus W^\perp = E$.

- Pour $f \in E$,

$$f \in W^\perp \Leftrightarrow f \perp w_1 \text{ et } f \perp w_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \int_0^1 f(t) e^t + f'(t) e^t dt = 0 \\ \int_0^1 f(t) e^{-t} - f'(t) e^{-t} dt = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [f(t) e^t]_0^1 = 0 \\ [-f(t) e^{-t}]_0^1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e f(1) - f(0) = 0 \\ f(0) - \frac{1}{e} f(1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e f(1) - f(0) = 0 \\ (e - \frac{1}{e}) f(1) = 0 \end{cases} \quad l_1 + l_2$$

$$\Leftrightarrow f(0) = f(1) = 0$$

$$\Leftrightarrow f \in V$$

On a bien montré que $W^\perp = V$

- Orthonormalisons la base (w_1, w_2) de W

$$\begin{aligned} * \|w_1\|^2 &= \int_0^1 e^{2t} + e^{2t} dt \\ &= [e^{2t}]_0^1 \\ &= e^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\text{On pose donc } \underline{e_1(x) = \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}} e^x}$$

$$* \text{ On pose } \tilde{e}_2 = w_2 - \uparrow_{\text{Vect}(e_1)}(w_2)$$

$$= w_2 - \langle w_2, e_1 \rangle e_1$$

$$= w_2 - \frac{1}{e^2 - 1} \langle w_2, w_1 \rangle w_1$$

$$\text{avec } \langle w_2, w_1 \rangle = \int_0^1 1 - 1 dt = 0$$

$$= w_2$$

$$\begin{aligned}
 * \|w_2\|^2 &= \int_0^1 e^{-2t} + e^{-2t} dt \\
 &= [-e^{-2t}]_0^1 \\
 &= 1 - e^{-2}
 \end{aligned}$$

On pose donc
$$e_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2}}} e^{-x}$$

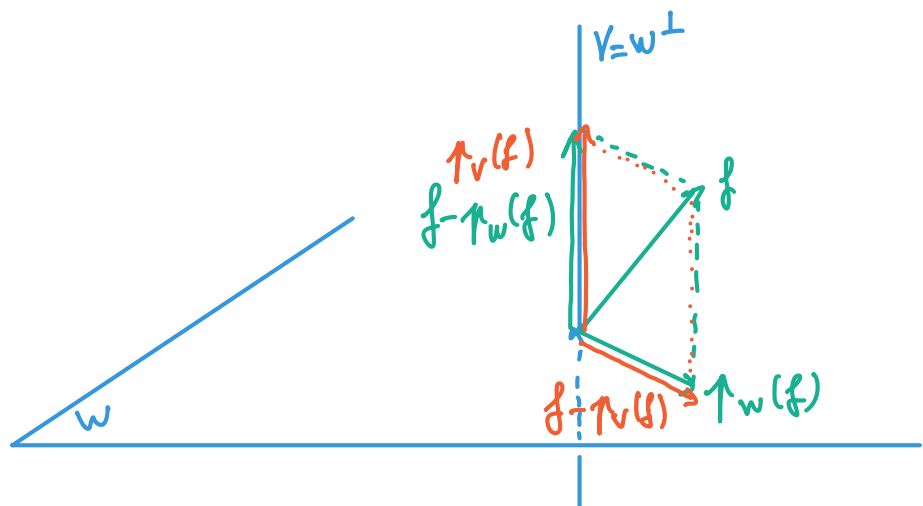
Ainsi (e_1, e_2) est une base orthonormée de W

• On a donc, pour $f \in W$:

$$\begin{aligned}
 \uparrow_w(f) &= \langle f | e_1 \rangle e_1 + \langle f | e_2 \rangle e_2 \\
 &= \frac{1}{e^2 - 1} \langle f | w_1 \rangle w_1 + \frac{1}{1 - e^{-2}} \langle f | w_2 \rangle w_2 \\
 &= \frac{1}{e^2 - 1} (ef(1) - f(0)) w_1 + \frac{1}{1 - e^{-2}} (f(0) - e^{-1}f(1)) w_2
 \end{aligned}$$

(calcul faits ci-dessus)

ie
$$p(f)(x) = \frac{ef(1) - f(0)}{e^2 - 1} e^x + \frac{f(0) - e^{-1}f(1)}{1 - e^{-2}} e^{-x}$$



(d) Pour $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, on définit :

$$E_{\alpha, \beta} = \{f \in E \text{ t.q. } f(0) = \alpha, f(1) = \beta\}$$

$$\text{Calculer } \inf_{f \in E_{\alpha, \beta}} \left(\int_0^1 (f^2 + f'^2) \right).$$

(d) Remarquons que $E_{\alpha, \beta}$ n'est pas un espace vectoriel, mais est un espace affine, translaté de l'espace V .

Considérons $g \in E$ tq $g(0) = \alpha$ et $g(1) = \beta$,

$$\text{par exemple } g(x) = \alpha + (\beta - \alpha)x$$

$$\text{Alors } E_{\alpha, \beta} = g + V$$

$$\text{ie } f \in E_{\alpha, \beta} \Leftrightarrow \exists v \in V \text{ tq } f = g + v$$

On a donc :

$$\inf_{f \in E_{\alpha, \beta}} \int_0^1 f^2 + f'^2 = \inf_{f \in E_{\alpha, \beta}} \|f\|^2$$

$$= \inf_{v \in V} \|g + v\|^2$$

$$= \inf_{v \in V} \|g - v\|^2$$

Car v parcourt $V \Leftrightarrow -v$ parcourt V

$$= d(g, V)^2$$

distance de g au sous-espace V

$$= \|g - p_V(g)\|^2$$

$$= \|p_W(g)\|^2$$

D'après la question (c), on connaît les coordonnées de $p_w(g)$ dans la base orthonormée (e_1, e_2) , qui sont

$$\left(\frac{e g(1) - g(0)}{\sqrt{e^2 - 1}}, \frac{g(0) - \bar{e}' g(1)}{\sqrt{1 - \bar{e}^2}} \right)$$

$$= \left(\frac{e\beta - \alpha}{\sqrt{e^2 - 1}}, \frac{\alpha - \bar{e}'\beta}{\sqrt{1 - \bar{e}^2}} \right)$$

$$\text{donc } \|p_w(g)\|^2 = \frac{(e\beta - \alpha)^2}{e^2 - 1} + \frac{(\alpha - \bar{e}'\beta)^2}{1 - \bar{e}^2}$$

$$= \frac{e^2\beta^2 - 2\alpha\beta e + \alpha^2 + \bar{e}^2\alpha^2 - 2\bar{e}\alpha\beta + \beta^2}{e^2 - 1}$$

$$= \frac{(\alpha^2 + \beta^2)(e^2 + 1) - 4\alpha\beta e}{e^2 - 1}$$

↑
c'est l'inf recherché

