$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(A^T B)$$

(a) • Pour $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle A, S \rangle &= \operatorname{tr}(A^T S) \\
&= \operatorname{tr}(-AS) && \text{car } A \text{ antisymétrique} \\
&= -\operatorname{tr}(AS) \\
&= -\operatorname{tr}(SA) && \text{par prop. de la trace} \\
&= -\operatorname{tr}(S^T A) && \text{car } S \text{ symétrique} \\
&= -\langle S, A \rangle
\end{aligned}$$

Par symétrie du produit scalaire, $\langle A, S \rangle = 0$

• On a donc montré que $\underline{\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \perp \mathcal{A}_n(\mathbb{R})}$

donc que la somme $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est en fait une somme directe orthogonale, que l'on peut noter $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

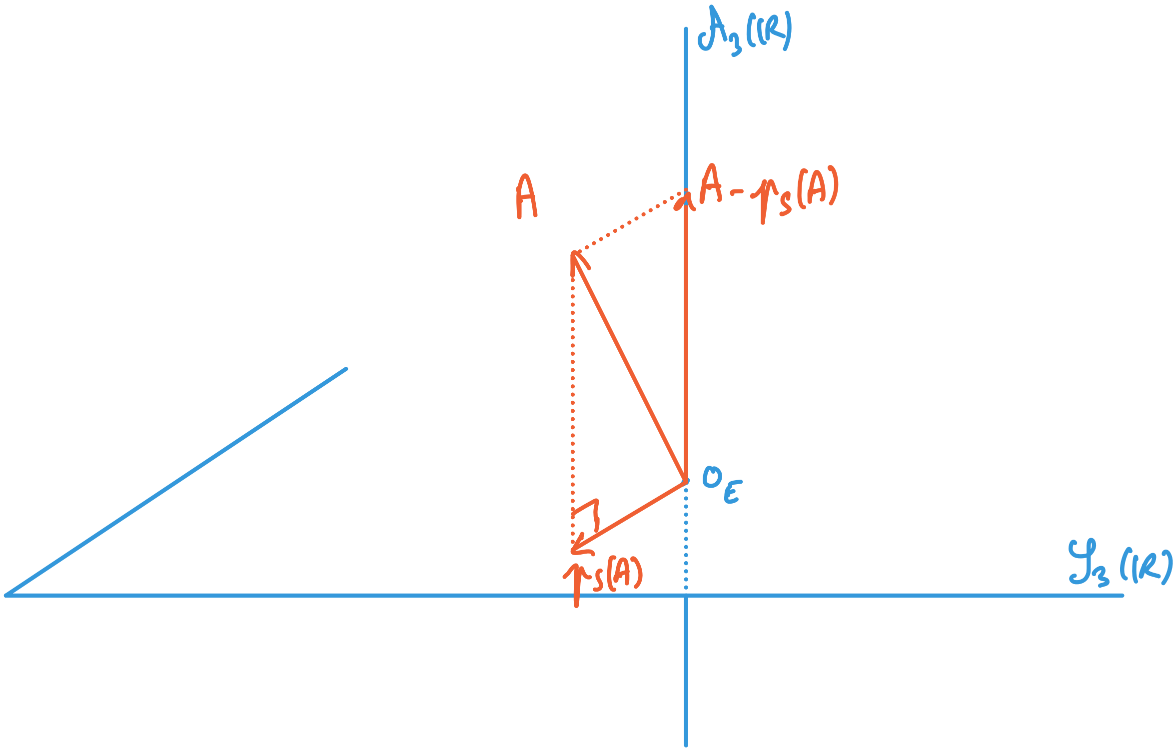
• Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$M = \underbrace{\frac{M+M^T}{2}}_{\in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\frac{M-M^T}{2}}_{\in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})} \qquad (*)$$

donc $\underline{\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{A}_n(\mathbb{R})}$

• On a donc établi : $\underline{\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

(b)



On note $p_S(A)$ le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

On sait que $\underline{d(A, \mathcal{S}_3(\mathbb{R})) = \|A - p_S(A)\|}$

La formule (*) donne la décomposition de A dans $\mathcal{S}_3 \oplus \mathcal{A}_3$:

$$A - p_S(A) = \frac{A - A^T}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $d(A, \mathcal{S}_3(\mathbb{R})) = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\sum_{i,j} (a_{ij})^2}$

$$= \sqrt{4}$$

$$\underline{= 2}$$