$$E = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$$

$$\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$$

(a) <u>Montrons que E est un sous-ev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$</u>

* $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

* $(0)_n \in E$

* Soit $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

  Alors $(\lambda u_n)^2 = \lambda^2 u_n^2$ est t.g. série convergente

* Soit $u, v \in E$

  Alors $|u_n v_n| \leq \frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2)$

  t.g. série convergente

  donc $\sum u_n v_n$ converge absolument.

  Par suite, $(u_n + v_n)^2 = u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2$

  est t.g. d'une série absolument convergente

Donc E est stable par C.L.

(b) <u>Mque $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire</u>.

* on a montré, pour $u, v \in E$, que $\sum u_n v_n$ est

  une série absolument convergente, donc

  $\langle u, v \rangle$ existe bien

* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique par linéarité de Σ, bilinéarité du produit et commutativité du produit.

* Pour $u \in E$, $\langle u, u \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2$
≥ 0

* Soit $u \in E$ tq $\langle u, u \rangle = 0$ ie $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = 0$

C'est une somme nulle de termes ≥ 0, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$ ie $u = 0$

On a montré que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique positive, définie-positive, c'est-à-dire que c'est un produit scalaire.

(c) La suite définie par $v_n = \frac{1}{n+1}$ n'est pas dans F mais est bien de carré sommable.

(d) Analyse: Soit $u \in F^\perp$

Alors en particulier, $u \perp (\delta_{kn})_{n \in \mathbb{N}}$ pour tout k

(où $\delta_{kn} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq k \\ 1 & \text{si } n = k \end{cases}$, $(\delta_{kn})_n \in F$)

donc $0 = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \delta_{kn} = u_k$ pour tout k

Ainsi $F^\perp \subset \{0_E\}$

Synthèse. On a bien-sûr $\{0_E\} \subset F^\perp$

On a donc montré que $\underline{F^\perp = \{0_E\}}$

On a donc $F + F^\perp = F + \{0_E\}$

$$= F$$

$$\subsetneq E$$

donc <u>F et $F^\perp$ ne sont pas supplémentaires dans E.</u>

(e) • Soit $w \in F^\perp + G^\perp$

donc $\exists (u, v) \in F^\perp \times G^\perp$ tq $w = u + v$

<u>Mque $w \in (F \cap G)^\perp$</u>

Soit $s \in F \cap G$

Alors $\langle w, s \rangle = \langle u, s \rangle + \langle v, s \rangle$

$= 0 + 0$ car $u \in F^\perp, s \in F$
$v \in G^\perp, s \in G$

On a montré que $\underline{F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp}$

Rmq : cette inclusion est toujours vraie.

- Ici, $F^\perp + G^\perp = \{0_E\} + G^\perp = G^\perp$

  et $(F \cap G)^\perp = \{0_E\}^\perp = E$

  On retrouve l'inclusion $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$

  car $G^\perp \subset E$, mais c'est une justification

  de circonstance.

- La suite $v \in G$ et $v \neq 0$ donc $v \in E \setminus G^\perp$.

  Ainsi l'inclusion précédente est stricte :

  On a $\underline{F^\perp + G^\perp \subsetneq (F \cap G)^\perp}$