On note P_n = « obtenir un pile au n^e lancer » et F_n « un face.. ».

X est la va du nombre de lancers pour obtenir, pour la première fois, deux piles consécutifs.

(a) * $(X=1)$ est impossible donc $\underline{a_1 = 0}$

* $(X=2) = P_1 \cap P_2$

donc $a_2 = P(P_1)\,P(P_2)$ par indépendance des lancers

$= \left(\frac{2}{3}\right)^2$ $\qquad \underline{a_2 = \frac{4}{9}}$

* $(X=3) = F_1 \cap P_2 \cap P_3$

donc $a_3 = P(F_1)\,P(P_2)\,P(P_3)$ par indépendance

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$ $\qquad \underline{a_3 = \frac{4}{27}}$

(b) On applique la <u>formule de probabilités totales</u>, avec le système complet $(F_1,\ P_1 \cap F_2,\ P_1 \cap P_2)$:

$$P(X=n) = P(X=n \mid F_1)\,P(F_1) + P(X=n \mid P_1 \cap F_2)\,P(P_1 \cap F_2) + P(X=n \mid P_1 \cap P_2)\,P(P_1 \cap P_2)$$

* Sachant $P_1 \cap P_2$, l'évènement $(X=n)$ ne peut être réalisé puisque $(X=2)$ est réalisé.

* Sachant F_1, l'évènement $(X=n)$ est réalisé si et seulement si il faut (après le 1^{er} lancer) $(n-1)$ lancers pour obtenir

deux piles consécutifs. Ainsi $P(X=n \mid F_1) = P(X=n-1)$

* De même $P(X=n \mid P_1 \cap F_2) = P(X=n-2)$

On a donc :

$$\underline{a_n = a_{n-1}\,\frac{1}{3} + a_{n-2}\,\frac{2}{9} + 0}$$

(c) $(a_n)_n$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, à coefficients constants, homogène. Son polynôme caractéristique est

$$X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{2}{9} = \left(X - \frac{2}{3}\right)\left(X + \frac{1}{3}\right)$$

donc il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tq

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = A\left(\frac{2}{3}\right)^n + B\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

Comme $a_1 = 0$ et $a_2 = \frac{4}{9}$, (A, B) est solution de :

$$\begin{cases} 2A - B = 0 \\ 4A + B = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} & L_1 + L_2 \\ B = \frac{4}{3} & L_2 - 2L_1 \end{cases}$$

Ainsi, la loi de X est :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$$

$$\underline{\forall n \geq 2, \quad P(X=n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 4\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}$$

Remarquons que cette égalité est valable pour $n=1$.

(d) X est à valeurs positives. On calcule donc, dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$:

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, P(X=n)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} n \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 4\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right]$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad - 4\left(-\frac{1}{3}\right)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

ces deux séries convergent comme séries entières

dérivées de la série géométrique, évaluées en $\frac{2}{3}$ et $-\frac{1}{3}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = (1-x)^{-2}$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} \quad - \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{3}\right)^2}$$

$$= 4 - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{15}{4}$$

$$< +\infty$$

On en déduit que X admet une espérance et $E(X) = \frac{15}{4}$.