On veut montrer que χ_u et Π_u ont les mêmes facteurs irréductibles.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie n.

On note χ_u le polynôme caractéristique, Π_u le polynôme minimal.

- Par le th de Cayley-Hamilton, χ_u annule u

  donc $\Pi_u \mid \chi_u$.

  Ainsi, les facteurs irréductibles de Π_u sont facteurs de χ_u.

- Réciproquement, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

  χ_u est scindé, ses facteurs irréductibles sont

  de la forme $(X-\lambda)$.

  Soit $(X-\lambda)$ l'un de ces facteurs irréductibles.

  Alors λ est racine de χ_u, donc valeur propre de u.

  Mais Π_u annule u donc λ est racine de Π_u.

  Par suite $(X-\lambda)$ est un facteur de Π_u

- Réciproquement, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

  On note $A = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$ où $\mathcal{B}$ est une base de E.

  Alors $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

  $\chi_u = \chi_A \in \mathbb{R}[X]$

  Ses facteurs irréductibles sont de la forme :

* $(X-\lambda)$ cas précédent

* $(X^2+pX+q) = (X-\mu)(X-\bar{\mu})$

où $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

En appliquant le cas précédent à $(X-\mu)$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on en déduit que $(X-\mu) \mid \Pi_u$ et $(X-\bar{\mu}) \mid \Pi_u$

donc, comme $(X-\mu) \wedge (X-\bar{\mu}) = 1$,

$(X-\mu)(X-\bar{\mu}) \mid \Pi_u$

c'est-à-dire que (X^2+pX+q) est un facteur de Π_u dans $\mathbb{R}[X]$.

• Réciproquement, si $\mathbb{K}$ qcq

Montrons que $\chi_u \mid \Pi_u^n$ par récurrence forte sur n

• pour $n=1$, $\chi_u = \Pi_u \mid \Pi_u^1$

• on suppose le résultat vrai en dimension $\leq n$.

Soit E de dimension $n+1$, et $x \in E \setminus \{0\}$ fixé

$I = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tq } P(u)(x) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, qui contient Π_u. I est engendré par un unique polynôme unitaire noté μ_u, de degré d, et $\mu_u \mid \Pi_u$

1er cas: Si $d = n+1$, alors $\deg(\Pi_u) \geq n+1$

et comme $\Pi_u \mid \chi_u$, $\deg(\Pi_u) = n+1$

et $\Pi_u = \chi_u$, donc $\chi_u \mid \Pi_u^{n+1}$

2e cas si $d \leq n$

On note $F = \mathrm{Vect}(x, u(x), \dots, u^{d-1}(x))$

c'est un sous-ev de E, de dimension d

(par minimalité de μ_u), stable par u.

Dans une base adaptée à F, par blocs

$$M = \mathrm{Mat}(u) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

et $\chi_u = \chi_A \chi_C$

donc $\chi_u \mid \Pi_A^d \Pi_C^{n+1-d}$ par H.R. $(\diamond)$

Mais, pour $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(M) = \left(\begin{array}{c|c} P(A) & * \\ \hline 0 & P(C) \end{array}\right)$

donc en particulier

$$0 = \Pi_u(M) = \left(\begin{array}{c|c} \Pi_u(A) & * \\ \hline 0 & \Pi_u(C) \end{array}\right)$$

Ainsi Π_u est annulateur de A et C

donc $\Pi_A \mid \Pi_u$ et $\Pi_C \mid \Pi_u$

Il suit, reprenant $(\diamond)$: $\chi_u \mid \Pi_u^{n+1}$

. On a montré, par récurrence, que $\chi_u \mid \Pi_u^m$ tq

les facteurs irréductibles de χ_u apparaissent donc dans Π_u^m, donc dans Π_u.