On veut montrer que $\operatorname{tr}(M) = 0 \iff M$ semblable à une matrice dont les coeffs diagonaux sont nuls

$\Leftarrow$ Si $M = P \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$

alors $\operatorname{tr}(M) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow$ Par récurrence sur n.

- Pour $n = 1$, le résultat est clair.
- Soit $n \geq 1$. On suppose que, si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\operatorname{tr}(N) = 0$,

alors $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ tq $N = P \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$

On considère $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ tq $\operatorname{tr}(M) = 0$.

On note $u \in \mathcal{L}(\underbrace{\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{K})}_{E})$ canoniquement associée à M.

1er cas : s'il existe x tq $(x, u(x))$ libre

On complète cette famille en $\mathcal{B} = (x, u(x), \dots)$ base de E.

$$\operatorname{Mat}(u, \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline 1 & \\ 0 & \\ \vdots & N \\ 0 & \end{array}\right)$$

et $0 = \operatorname{tr} M$

$= \operatorname{tr}(u)$

$= \operatorname{tr}(N)$

On applique l'HR à N :

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}) \text{ t.q. } N = P \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & \ddots \\ & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

donc

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline 1 & \\ 0 & P \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & \ddots \\ & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline * & \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & \ddots \\ & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P^{-1} \end{array}\right)$$

inverse

donc M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & \ddots \\ & 0 \end{pmatrix}$

2e cas si $\forall x$, $(x, u(x))$ est liée.

Alors, par un exercice classique, u est une homothétie (de rapport λ) donc $M = \lambda I_{n+1}$

Avec $0 = \mathrm{tr}(M)$

$= (n+1)\lambda$

On a donc $\lambda = 0$ ie $M = 0$, de diagonale nulle.

On a montré, par récurrence, le résultat annoncé.