Ici, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose $\mathrm{tr}(A^k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$

Première méthode :

- On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p, 0, \dots, 0$ les n valeurs propres de A, répétées selon leur multiplicité, avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p \neq 0$.

  On suppose qu'il y a une v.p. non nulle, i.e. $p \geq 1$.

  A est trigonalisable sur $\mathbb{C}$, donc $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $A = PTP^{-1}$

$$\text{où} \quad T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & * \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_p & & \\ & (0) & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad 0 = \mathrm{tr}(A^k)$

$= \mathrm{tr}(T^k)$ tr invariant par similitude

$= \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^k$ les coeff diagonaux de T^k sont les puissances k de ceux de T.

et, pour $k = 0$, $\mathrm{tr}(A^0) = \mathrm{tr}(I_n)$

$= n$

- On définit le polynôme :

$$P = \prod_{j=1}^{n} (X - \lambda_j)$$

que l'on écrit aussi sous forme développée :

$$P = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i$$

On calcule alors :

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{j=1}^{n} P(\lambda_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \lambda_j^i \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^i \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \operatorname{tr}(A^i) \\
&= \alpha_0 n
\end{aligned}$$

et donc $\alpha_0 = 0$

- Par les relations coefficients-racines, on a

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{n} \lambda_j &= (-1)^n \alpha_0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

donc l'une des λ_j est nulle, ce qui <u>contredit</u> la définition des λ_j.

• On a montré que $Sp(A) = \{0\}$

donc $\chi_A = X^n$.

Par le th. de Cayley-Hamilton, $A^n = 0$

donc <u>A est nilpotente</u>.

<u>2e méthode</u>

• On note $\mu_1, \dots, \mu_p, 0$ les vp distinctes de A

et $m_1, \dots, m_p, m$ leurs multiplicités respectives.

• Dans $M_n(\mathbb{C})$, A est trigonalisable, ie $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq

$A = PTP^{-1}$ où

$$T = \begin{pmatrix} \overbrace{\lambda_1 \cdots \lambda_1}^{m_1} & & & & * \\ & \ddots & & & \\ & & \overbrace{\lambda_p \cdots \lambda_p}^{m_p} & & \\ & (0) & & \overbrace{0 \cdots 0}^{m} & \end{pmatrix}$$

• L'hypothèse s'écrit alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$$m_1 \lambda_1^k + \dots + m_p \lambda_p^k = 0$$

donc, en particulier :

$$\begin{cases} \lambda_1 m_1 + \cdots + \lambda_p m_p = 0 \\ \lambda_1^2 m_1 + \cdots + \lambda_p^2 m_p = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1^p m_1 + \cdots + \lambda_p^p m_p = 0 \end{cases}$$

On reconnaît un système linéaire d'inconnues $m_1, \dots, m_p$, dont le déterminant est :

$$\det(S) = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_p \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & & \lambda_p^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^p & \lambda_2^p & & \lambda_p^p \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_1 . \lambda_2 . \cdots \lambda_p \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & & \lambda_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{p-1} & \lambda_2^{p-1} & & \lambda_p^{p-1} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_p \; V(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$$

(déterminant de Vandermonde)

$$= \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_p \prod_{1 \leq i < j \leq p} (\lambda_j - \lambda_i)$$

$\neq 0$ car les λ_j sont non nuls et deux à deux distincts.

Le système est donc de Cramer, sa seule solution est $(m_1 \dots m_p) = (0, \dots, 0)$

- Ainsi, 0 est la seule v.p. de A

  donc $\chi_A = X^n$

  donc $A^n = 0$ par le th de Cayley-Hamilton.