$\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, $\qquad u(x) = \varphi(a)x - \varphi(x)a$

(a) • u est à valeur dans E

• $u(\lambda x + \mu y) = \varphi(a)(\lambda x + \mu y) - \varphi(\lambda x + \mu y)a$

$= \varphi(a)(\lambda x + \mu y) - (\lambda \varphi(x) + \mu \varphi(y))a$

par linéarité de φ

$= \lambda(\varphi(a)x - \varphi(x)a) + \mu(\varphi(a)y - \varphi(y)a)$

$= \lambda u(x) + \mu u(y)$

(b) Pour $x \in E$, on calcule :

$$u \circ u(x) = \varphi(a)[\varphi(a)x - \varphi(x)a] - \varphi(\varphi(a)x - \varphi(x)a)a$$

$$= \varphi(a)^2 x - \varphi(a)\varphi(x)a - \varphi(a)\varphi(x)a + \varphi(x)\varphi(a)a$$

$$= \varphi(a)(\varphi(a)x - \varphi(x)a)$$

$$= \varphi(a)u(x)$$

On peut calculer plus efficacement :

$$u \circ u(x) = u(\varphi(a)x - \varphi(x)a)$$

$$= \varphi(a)u(x) - \varphi(x)\underbrace{u(a)}_{\text{nul}}$$

$$= \varphi(a)u(x)$$

Donc $\underline{P = X(X - \varphi(a)) \text{ est annulateur de } u}$

(c) • Si $\varphi(a) \neq 0$, alors P est scindé simple, annulateur de u, donc u est diagonalisable

• Si $\varphi(a) = 0$, alors X^2 est annulateur de u donc $Sp(u) \subset \{0\}$. N'ayant qu'une seule vp, u est diagonalisable si et seulement si $u = 0$.

Or $u(x) = \varphi(x) a$ est nul ssi $a = 0$

En conclusion : u diagonalisable

$$\boxed{\iff \varphi(a) \neq 0 \text{ ou } a = 0}$$