$$B = \left(\begin{array}{c:c} 0 & I_n \\ \hdashline A & 0 \end{array}\right)$$

(a) On calcule, par blocs :

$$B^2 = \left(\begin{array}{c:c} 0 & I_n \\ \hdashline A & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c:c} 0 & I_n \\ \hdashline A & 0 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c:c} A & 0 \\ \hdashline 0 & A \end{array}\right)$$

(b) Comme la matrice précédente est diagonale par blocs, on a :

$$\underset{\underset{\det(B)^2}{\shortparallel}}{\det(B^2)} = \det(A) \times \det(A)$$

Donc $\det B \neq 0 \iff \det A \neq 0$

ie B inversible $\iff$ A inversible

(c) On suppose A diagonalisable et inversible.

Alors Π_A est scindé simple et 0 n'est pas racine de Π_A.

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les vp de A (qui sont non nulles)

et $\Pi_A = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)$.

Par le calcul de (a), on déduit par récurrence que

$$B^{2k} = \left(\begin{array}{c:c} A^k & \\ \hdashline & A^k \end{array}\right)$$

et donc, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(B^2) = \left(\begin{array}{c:c} P(A) & 0 \\ \hdashline 0 & P(A) \end{array}\right)$

Considérons $P = \Pi_A(X^2)$

$$= \prod_{i=1}^{n} (X^2 - \lambda_i)$$

C'est un polynôme annulateur de B

et, en notant μ_i une racine carrée de λ_i,

on a $$P = \prod_{i=1}^{n} (X - \mu_i)(X + \mu_i)$$

donc P est scindé simple (les $\mu_i \neq 0$)

Par suite, <u>B est diagonalisable.</u>