$$u(M) = aM + \mathrm{tr}(M) I_n$$

(a) Les choses sont assez simples pour raisonner directement par condition suffisante (synthèse). Mais on peut aussi écrire l'équation aux éléments propres

$$u(M) = \lambda M \iff (a-\lambda) M + \mathrm{tr}(M) I_n = 0$$

et discuter selon que (M, I_n) est libre ou non.

- Si $\mathrm{tr}(M) = 0$, alors $u(M) = aM$

  donc M est vecteur propre associé à la vp a

  Donc $E_a(u) \supset H$

  hyperplan des matrices de trace nulle

- $u(I_n) = a I_n + \mathrm{tr}(I_n) I_n$

  $= (a+n) I_n$

  donc $(a+n)$ est valeur propre et

  $E_{a+n}(u) \supset \mathrm{Vect}(I_n)$

- On a donc $\dim E_a(u) \geq n^2 - 1$

  $\dim E_{a+n}(u) \geq 1$

  et $\dim E_a(u) \oplus E_{a+n}(u) \leq n^2$

Donc $\mathrm{Sp}(u) = \{a, a+n\}$

et $E_a(u) = H$, $E_{a+n}(u) = \mathrm{Vect}(I_n)$

(b) On a montré en (a) que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = E_a(u) \oplus E_{a+n}(u)$

par égalité des dimensions, donc <u>u est diagonalisable</u>.

Par suite,
$$\Pi_u(X) = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X-\lambda)$$
$$= (X-a)(X-a-n)$$

<u>Remarque</u>: On peut l'obtenir de façon plus directe.

$$u^2(M) = a\, u(M) + tr(u(M))\, I_n$$
$$= a^2 M + 2a\, tr(M) I_n + tr(M)\, tr(I_n)\, I_n$$
$$= a^2 M + 2a\, tr(M) I_n + n\, tr(M)\, I_n$$
$$= a^2 M + (2a+n)\, tr(M) I_n$$
$$= a^2 M + (2a+n)\, u(M) - (2a+n) a M$$
$$= (2a+n) u(M) - (a+n) a M$$

donc $P = X^2 - (2a+n)X + (a+n)a$ est annulateur

de u.

On a, avec somme et produit des racines,
$$P = (X-(a+n))(X-a)$$

Comme $X-a$ et $X-(a+n)$ ne sont pas annulateurs de u,

c'est que P est le polynôme minimal de u.