Notons $C(u)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec u. On veut <u>montrer que $C(u) = \mathbb{K}[u]$</u>.

$\boxed{\supset}$ cette inclusion est connue

$\boxed{\subset}$ Soit $v \in C(u)$.

Regardons d'abord $v(x_0) \in E$.

Comme $\mathcal{B} = (x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est libre à n éléments dans E de dimension n, c'est une base de E. Donc il existe $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ tq

$$v(x_0) = a_0 x_0 + a_1 u(x_0) + \dots + a_{n-1} u^{n-1}(x_0)$$

Considérons $w = a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 u + \dots + a_{n-1} u^{n-1} \in \mathbb{K}[u]$, et montrons que $v = w$.

* on a déjà $v(x_0) = w(x_0)$
* de plus, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$\begin{aligned} v(u^k(x_0)) &= u^k(v(x_0)) && \text{car } v \in C(u) \\ &= u^k(w(x_0)) && \text{par déf de } w \\ &= w(u^k(x_0)) && \text{car } w \in \mathbb{K}[u] \subset C(u) \end{aligned}$$

Donc les deux endomorphismes v et w coïncident sur les n vecteurs de la base $\mathcal{B}$, et donc sont égaux : $v = w$.