Pour f continue sur $\mathbb{R}_+$, on note

$$T_f : x \longmapsto \begin{cases} f(0) & \text{si } x=0 \\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & \text{si } x>0 \end{cases}$$

(a) • <u>Vérifions la linéarité de T</u> :

Soit $f, g \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Alors pour tout $x>0$,

$$T_{(\lambda f+\mu g)}(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (\lambda f+\mu g)(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{x}\left(\lambda \int_0^x f(t)\,dt + \mu \int_0^x g(t)\,dt\right)$$

$$= \lambda T_f(x) + \mu T_g(x)$$

et pour $x=0$, $T_{(\lambda f+\mu g)}(0) = \lambda f(0) + \mu g(0)$

$$= \lambda T_f(0) + \mu T_g(0)$$

On a donc montré :

$$T(\lambda f+\mu g) = \lambda T(f) + \mu T(g)$$

- <u>Vérifions que T est à valeurs dans E.</u>

Soit $f \in E$. On veut montrer la continuité de Tf sur $\mathbb{R}_+$.

* $x \longmapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ par le

théorème fondamental de l'analyse, avec f continue.

En particulier elle est continue et donc, par

opération, <u>Tf est continue sur $]0,+\infty[$</u>

* Notons $F : x \longmapsto \int_0^x f(t)\,dt$. Cette fonction est $\mathcal{C}^1$

sur $[0,+\infty[$ car f est continue sur $[0,+\infty[$, et

$F'(x) = f(x)$.

On a alors, pour $x > 0$:

$$Tf(x) = \frac{F(x)-F(0)}{x-0} \qquad \text{taux d'accroissement}$$

$$\xrightarrow[x \to 0]{} F'(0)$$

$$= f(0) = Tf(0)$$

Donc <u>Tf est continue en 0.</u>

On a montré que $Tf \in E$

Ainsi, <u>$T \in \mathcal{L}(E)$</u>

(b) • <u>Analyse</u>. Soit λ valeur propre et f vecteur propre associé

Donc $T(f) = \lambda f$ où $f \neq 0_E$

Ainsi, $\begin{cases} f(0) = \lambda f(0) \\ \int_0^x f(t)\,dt = \lambda x f(x) \qquad \forall x > 0 \end{cases}$

* <u>La valeur $\lambda = 0$ est exclue,</u>

sinon $f(0) = 0$ et $\forall x > 0$, $\int_0^x f(t)\,dt = 0$

donc, en dérivant, $\forall x > 0$ $f(x) = 0$

* On peut donc écrire $f(x) = \dfrac{1}{\lambda x} \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ $\forall x > 0$

donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et, en dérivant :

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = -\frac{1}{\lambda x^2} \int_0^x f(t)\,dt + \frac{1}{\lambda x} f(x)$$

$$= -\frac{1}{x} f(x) + \frac{1}{\lambda x} f(x)$$

Donc f est solution sur $]0, +\infty[$ de :

$$y' + \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) y = 0$$

donc il existe $A \in \mathbb{R}$ tq

$$\forall x > 0, \quad f(x) = A\, e^{-\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \ln x}$$

$$= A\, x^{\frac{1}{\lambda} - 1}$$

Mais $f(0) = \lambda f(0)$ donc $\lambda = 1$ ou $f(0) = 0$

$*$ Si $\lambda = 1$, $f(x) = A$ $\forall x > 0$ donc par continuité

$f(0) = A$ et f est constant

$*$ Si $\lambda \neq 1$, $f(0) = 0$

donc, pour avoir la continuité de f en 0,

nécessairement $\frac{1}{\lambda} - 1 > 0$

i.e. $\lambda \in]0, 1[$

et dans ce cas, $f(x) = A\, x^{\frac{1}{\lambda} - 1}$ $\forall x \geq 0$

- <u>Synthèse</u>.

Soit $\lambda \in]0, 1]$ et $f(x) = x^{\frac{1}{\lambda} - 1}$ $\forall x \geq 0$

On a bien $f \in E$, et $f \neq 0$

$*$ pour $\lambda = 1$, $T_f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x 1 \, dt$

$= f(x)$ $\forall x > 0$

$T_f(0) = f(0)$ par déf.

donc $T_f = f$

$= 1 . f$

* pour $\lambda \neq 1$, $\quad T_f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x t^{\frac{1}{\lambda}-1} dt$

$$= \frac{1}{x} \left[\lambda \, t^{\frac{1}{\lambda}} \right]_0^x$$

$$= \lambda \cdot x^{\frac{1}{\lambda}-1} \qquad \forall x>0$$

$$T_f(0) = 0$$

donc $\quad T_f = \lambda f$

<u>En conclusion :</u>

$Sp(T) = \,]0,1]$

et $\forall \lambda \in \,]0,1]$, $E_\lambda(T) = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto x^{\frac{1}{\lambda}-1}\right)$