(a) On calcule :

$$\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(u\circ v - v\circ u) \qquad \text{car } u = u\circ v - v\circ u$$
$$= \mathrm{tr}(u\circ v) - \mathrm{tr}(v\circ u) \qquad \text{par linéarité}$$
$$= 0 \qquad \text{car } \mathrm{tr}(u\circ v) = \mathrm{tr}(v\circ u)$$

(b) Montrons, par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$, $u^n\circ v - v\circ u^n = n u^n$

- Pour $n=0$, $u^0\circ v - v\circ u^0 = v - v$
$$= 0$$
$$= 0.u^0$$

- Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose que $u^n\circ v - v\circ u^n = n u^n$

Alors $u^{n+1}\circ v - v\circ u^{n+1} = u\circ(u^n\circ v) - v\circ u^{n+1}$
$$= u\circ(n u^n + v\circ u^n) - v\circ u^{n+1} \qquad \text{par H.R.}$$
$$= n u^{n+1} + (u\circ v)\circ u^n - v\circ u^{n+1}$$
$$= n u^{n+1} + (u + v\circ u)\circ u^n - v\circ u^{n+1}$$
$$= n u^{n+1} + u^{n+1} + v\circ u^{n+1} - v\circ u^{n+1}$$
$$= (n+1)u^{n+1}$$

- Par le principe de récurrence, la propriété est démontrée.

(c) $(f,g)\longmapsto f\circ g$ est bilinéaire de $\mathcal{L}(E)\times\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$

donc $\phi\in\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$

(d) <u>Par l'absurde</u>, supposons que u n'est pas nilpotent. Ainsi,

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^n \neq 0$.

Or, par (b) $\phi(u^n) = n u^n$

donc u^n est vecteur propre de ϕ, associé à la v.p. n.

On a trouvé une infinité de valeurs propres pour ϕ,

alors que $\dim(\mathcal{L}(E)) = p^2$ est finie.

C'est une contradiction, donc <u>u est nilpotent.</u>