

(a) On calcule:

$$D_n(a, a, c) = \begin{vmatrix} c & a & - & - & a \\ a & c & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & c & a \\ a & - & - & - & a & c \end{vmatrix}_{[n]} \quad (\text{d\'eterminant circulant})$$

$$C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

$$= (c + (n-1)a) \begin{vmatrix} 1 & a & - & - & a \\ 1 & c & a & - & - & a \\ 1 & a & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 1 & a & - & - & a & c \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$L_j' \leftarrow L_j - L_1 \text{ pour } j=2 \dots n$$

$$= (c + (n-1)a) \begin{vmatrix} 1 & a & - & - & a \\ 0 & c-a & 0 & - & - & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & - & - & 0 & c-a \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$= (c + (n-1)a) (c-a)^{n-1}$$

(b) On calcule:

$$\varphi(n) = D_m(a+n, b+n, c+n)$$

$$= \begin{vmatrix} c+n & b+n & - & - & b+n \\ a+n & c+n & & & \\ & & \diagdown & & \\ & & & \diagdown & \\ & & & & \diagdown & \\ & & & & & b+n \\ a+n & - & - & a+n & c+n \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$L_i \leftarrow L_i - L_1 \text{ pour } i=2 \dots n-1$$

$$= \begin{vmatrix} c+n & b+n & - & - & b+n \\ a-c & c-b & 0 & - & 0 \\ & & \diagdown & & \\ & & & \diagdown & \\ & & & & \diagdown & \\ & & & & & 0 \\ a-c & a-b & - & a-b & c-b \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$\text{div } L_1$$

$$= (c+n)(c-b)^{n-1} + \sum_{j=2}^n (b+n)(-1)^{1+j} \Delta_{1j}$$

où Δ_{1j} est un mineur indépendant de x .

Ainsi φ est affine ($\varphi(n)$ est de la forme $\alpha n + \beta$)

(c) • Déterminons α, β tq $\forall x, \varphi(x) = \alpha x + \beta$.

$$\varphi(-a) = (c-a)^m \quad \text{car la matrice est triangulaire}$$

$$\varphi(-b) = (c-b)^m \quad \text{" "}$$

$$\text{Donc } \alpha, \beta \text{ satisfont } \begin{cases} -\alpha a + \beta = (c-a)^m \\ -\alpha b + \beta = (c-b)^m \end{cases}$$

donc, avec $bL_1 - aL_2$:

$$(b-a)\beta = b(c-a)^m - a(c-b)^m$$

$$\text{ie } \beta = \frac{b(c-a)^m - a(c-b)^m}{b-a} \quad \text{car } a \neq b.$$

$$\bullet \text{ Alors } D_m(a, b, c) = \varphi(\circ)$$

$$= \beta$$

$$= \frac{b(c-a)^m - a(c-b)^m}{b-a}$$