Pour $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$, $f(P) = (2n+1)XP - (X^2-1)P'$

(a) • le produit de polynômes est bilinéaire et la dérivation est linéaire, donc $\underline{f \text{ est linéaire}}$.

On peut vouloir détailler :

Pour $P, Q \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$f(\lambda P + \mu Q) = (2n+1)X(\lambda P + \mu Q) - (X^2-1)(\lambda P + \mu Q)'$$

$$= (2n+1)X(\lambda P + \mu Q) - (X^2-1)(\lambda P' + \mu Q')$$

par linéarité de la dérivation

$$= \lambda\left[(2n+1)XP - (X^2-1)\lambda P'\right]$$

$$+ \mu\left[(2n+1)XQ - (X^2-1)Q'\right]$$

$$= \lambda f(P) + \mu f(Q)$$

• On doit ensuite montrer que f est à valeurs dans $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$

Pour $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$, $XP \in \mathbb{R}_{2n+2}[X]$

et $P' \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ donc $(X^2-1)P' \in \mathbb{R}_{2n+2}[X]$.

Ainsi $f(P) \in \mathbb{R}_{2n+2}[X]$.

Pour $P = aX^{2n+1} + Q$ où $Q \in \mathbb{R}_{2n}[X]$

$$f(P) = (2n+1)aX^{2n+2} - (X^2-1)a.(2n+1)X^{2n} + \overbrace{f(Q)}^{\in \mathbb{R}_{2n+1}[X]}$$

$$= 0X^{2n+2} + a(2n+1)X^{2n} + f(Q) \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$$

On peut présenter un raisonnement qui anticipe un peu plus la question suivante :

On calcule :

$$f(1) = (2n+1)X$$

$$f(X^k) = (2n+1)X^{k+1} - (X^2-1)kX^{k-1} \quad \text{pour } k \in \{1, .., 2n\}$$

$$= (2n+1-k)X^{k+1} + kX^{k-1}$$

$$f(X^{2n+1}) = (2n+1)X^{2n}$$

Donc $\forall k \in \{0, .., 2n+1\}, \quad f(X^k) \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$

Comme $\mathcal{B} = (X^0, \ldots, X^{2n+1})$ est une base de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$,

on a montré que $\underline{\mathbb{R}_{2n+1}[X] \text{ est stable par } f}$

(b) Par le calcul précédent,

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} f(1) & f(X) & \cdots & f(X^k) & \cdots & & f(X^{2n+1}) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ 2n+1 & 0 & \ddots & & & (0) & \\ & 2n & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & k & & & \\ & & & 0 & \ddots & & \\ & & & 2n+1-k & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & & \ddots & 2n & \\ & & & & & 0 & 2n+1 \\ & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ X \\ \vdots \\ X^{k-1} \\ X^k \\ X^{k+1} \\ \vdots \\ X^{2n} \\ X^{2n+1} \end{matrix} \end{array}$$

Ainsi $\det f = \begin{vmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ 2n+1 & 0 & 2 & & & & (0) & \\ & 2n & 0 & \ddots & & & & \\ & & 2n-1 & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & (0) & & & 3 & 0 & 2n & 0 \\ & & & & 0 & 2 & 0 & \boxed{2n+1} \\ & & & & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{vmatrix}_{[2n+2]}$

dév C_{2n+2}

$$= (2n+1).(-1)^{2n+1+2n+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 2n+1 & \ddots & \ddots & & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & \ddots & \ddots & 2n-1 \\ & & & 3 & 0 & 2n \\ & & & & 0 & 1 \end{vmatrix}_{[2n+1]}$$

dév L_{2n+1}

$$= -\boxed{(2n+1)}.\boxed{1}(-1)^{2n+1+2n+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & & & \\ 2n+1 & 0 & \ddots & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & 0 & \boxed{2n-1} \\ & & & \boxed{3} & 0 \end{vmatrix}_{[2n]}$$

On renouvelle l'opération, ce qui fait apparaître à chaque fois le produit de (-1) et des deux termes encadrés.

$\det C_{2n}$

$\det L_{2n-1}$

$$= (-1)^2 (2n+1)(2n-1)(1)(3) \begin{vmatrix} 0 & 1 & & & \\ 2n+1 & 0 & \ddots & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ (0) & & \ddots & 0 & \boxed{2n-3} \\ & & & \boxed{5} & 0 \end{vmatrix}_{[2n-2]}$$

$$= [\,\dots\,]$$

$$= (-1)^n \Big[(2n+1)(2n-1)\dots(3)\Big]\Big[(1)(3)\dots(2n-1)\Big] \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2n+1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot \Big[1 \times 3 \times \dots \times (2n-1) \times (2n+1)\Big]^2$$

$$= (-1)^{n+1} \left[\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ \dots \ (2n-2)(2n-1)(2n)(2n+1)}{2 \cdot 4 \qquad (2n-2) \qquad (2n)}\right]^2$$

$$= (-1)^{n+1} \left[\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ \dots \ (2n-2)(2n-1)(2n)(2n+1)}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \dots (n-1) \cdot n}\right]^2$$

$$= (-1)^{n+1} \left[\frac{(2n+1)!}{2^n \ n!}\right]^2$$