

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & (0) \\ -1 & & & \\ & & & \\ (0) & & & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}_n$$

(a) Soit $n \geq 1$. On calcule:

$$D_{n+2} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & & (0) \\ -1 & & & \\ & & & \\ (0) & & & -1 \\ & & -1 & 2 \end{vmatrix}_{n+2}$$

on développe par rapport à C_{n+2}

$$= (-1)^{n+1+n+2} (-1) \begin{vmatrix} 2 & -1 & & (0) \\ -1 & & & \\ & & & \\ (0) & & & -1 \\ 0 & & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{n+2}$$

$$+ (-1)^{n+2+n+2} (2) \begin{vmatrix} 2 & -1 & & (0) \\ -1 & & & \\ & & & \\ (0) & & & -1 \\ & & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}_{n+2}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & & (0) \\ -1 & & & \\ & & & \\ (0) & & & -1 \\ 0 & & & 0 & -1 \end{vmatrix}_{n+1} + 2 D_{n+1}$$

on développe par rapport à L_{n+1}

$$= (-1)^{n+1+n+1} (-1) D_n + 2 D_{n+1}$$

On a montré:

$$D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (E)$$

(b) • On calcule $D_1 = 2$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

• On peut prolonger (E) à $n \in \mathbb{N}$ en posant $D_0 = 1$,
qui est la valeur tq $D_2 = 2D_1 - D_0$

• (E) est une rel. de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

On factorise $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

donc $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}$:

$$D_n = \lambda 1^n + \mu n 1^n$$

• Vérif. les conditions initiales:

$$\forall n \in \mathbb{N}_1, \quad D_n = n + 1$$