

220.23

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, $e = \text{Id}_E$ et G un sous-groupe fini de $\text{GL}(E)$ et $n = \text{Card}(G)$. On note : $p = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g$.

(a) Montrer que : $\forall h \in G, p \circ h = p$.

(b) En déduire que p est un projecteur de E .

(c) Établir : $\bigcap_{g \in G} \text{Ker}(g - e) = \text{Im}(p)$.

(d) En déduire que :

$$\dim \left(\bigcap_{g \in G} \text{Ker}(g - e) \right) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \text{tr}(g)$$

220.23

a) Soit $h \in G$

$$\begin{aligned} p \circ h &= \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g \circ h \\ &= \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g = \boxed{p} \end{aligned}$$

On quand g parcourt G $g \circ h$ parcourt aussi G

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto g \circ h \end{aligned} \quad \underline{\underline{\text{bijection}}}$$

De même on a $\forall h \in G \quad h \circ p = p$

$$\begin{aligned} b) p \circ p &= \frac{1}{n} \sum_{g \in G} p \circ g \\ &= \frac{1}{n} \sum_{g \in G} p \end{aligned}$$

par (a)

$$= p \quad \text{car } |G| = n$$

Donc p est un projecteur de E .

c) Procédons par double inclusion:

• Soit $x \in \text{Im}(p)$ On a $p(x) = x$

Soit $g \in G$

$$\begin{aligned} g(x) &= g \circ p(x) \\ &= p(x) = x \end{aligned}$$

Donc $\text{Im}(p) \subset \bigcap_{g \in G} \text{Ker}(g - e)$

• Soit $x \in \bigcap_{g \in G} \text{Ker}(g - e)$

On a $\forall g \in G \quad g(x) = x$

$$p(x) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g(x) = x$$

$$\text{Ainsi } \boxed{\text{Im}(p) = \bigcap_{g \in G} \text{Ker}(g - e)} \quad \underline{\underline{\text{oui}}}$$

d) En passant à la dimension: kof

$$\dim \left(\bigcap_{g \in G} \text{Ker}(g - e) \right) = \text{rg } p$$

$$= \text{tr } p = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \text{tr } g \quad \text{par linéarité de la trace.}$$

car p projecteur.