

ANALYSE

Soit $X \in M_n(\mathbb{R})$ solution.

$$\exists! (X_A, X_S) \in A_n(\mathbb{R}) \times S_n(\mathbb{R}), X = X_A + X_S.$$

$$\text{Donc } X_A + X_S + (X_A + X_S)^T = \text{tr}(X_A + X_S) A$$

$$\text{Donc } 2X_S = \text{tr}(X_S) A.$$

$$\text{Si } \text{tr}(X_S) = 0$$

Alors $X_S = 0$, donc $X \in A_n(\mathbb{R})$

Si non, il s'agit de voir que :

- $A = \frac{2}{\text{tr}(X_S)} X_S$ donc $A \in S_n(\mathbb{R})$
- $\text{tr}(2X_S) = \text{tr}(\text{tr}(X_S) A) = \text{tr}(X_S) \text{tr}(A)$
 or $\text{tr}(2X_S) = 2 \text{tr}(X_S)$, donc $\text{tr}(A) = 2$.
- $\exists \lambda \in \mathbb{R}, X_S = \lambda A \quad (\lambda = \frac{\text{tr}(X_S)}{2})$

SYNTHÈSE

Si $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $\text{tr}(A) = 2$:

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X_A \in A_n(\mathbb{R})$.

$$\lambda A + X_A + (\lambda A + X_A)^T = 2\lambda A = \text{tr}(\lambda A + X_A) A$$

donc $\lambda A + X_A$ est solution

Si non :

Soit $X \in A_n(\mathbb{R})$.

$$X + X^T = 0 = \text{tr}(X) A$$

donc X est solution.

Conclusion :

Si $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $\text{tr}(A) = 2$, $S = \{ \lambda A + X \mid \lambda \in \mathbb{R}, X \in A_n(\mathbb{R}) \}$

Si non $S = A_n(\mathbb{R})$