$H = \mathrm{Vect}\,(AB - BA, \quad A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$

- $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$tr\,(AB - BA) = tr\,(AB) - tr\,(BA) \qquad \text{par linéarité}$$

$$= 0 \qquad \text{propriété connue}$$

donc $H \subset \mathrm{Ker}\,(tr)$

- $\mathrm{Ker}\,(tr)$ est le noyau d'une forme linéaire non nulle, c'est donc un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de dim. $n^2 - 1$

- Pour $i \neq j$, $F_{ij} = E_{ij} \cdot E_{jj} - E_{jj} \cdot E_{ij}$

$$= \delta_{jj}\, E_{ij} - \delta_{ji}\, E_{jj}$$

$$= E_{ij} \qquad \in H$$

Pour $i \neq n$ $\quad G_i = E_{in} \cdot E_{ni} - E_{ni}\, E_{in}$

$$= E_{ii} - E_{nn} \qquad \in H$$

- On a exhibé une famille $(F_{ij})_{i \neq j}, (G_i)_{i<n}$ de $n^2 - 1$ éléments qui sont dans H. Comme il s'agit d'une famille échelonnée de matrices, elle est libre et donc $\dim (H) \geq n^2 - 1$

- En conclusion, $\dim (H) = n^2 - 1$ donc $H = \mathrm{Ker}\,(tr)$ et H est un hyperplan.