(a)

$$A = \begin{array}{cl} \begin{array}{ccccc} & & & & \varphi(X^j) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & j & \cdots \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & 0 & & \binom{j}{i} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ X^i \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Par définition de matrice d'endomorphisme, on a :

$$\varphi(X^j) = \sum_{i=0}^{n} \binom{j}{i} X^i$$

$$= \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} X^i \qquad \text{car } \binom{j}{i} = 0 \text{ dès que } i > j$$

$$= (X+1)^j \qquad \text{par le binôme}$$

La connaissance des images des vecteurs d'une base donne la connaissance de l'application linéaire. φ coïncide avec $P \mapsto P(X+1)$ pour $P = 1$, $P = X$, ..., $P = X^n$ donc :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) \end{array}}$$

(b) On définit

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X-1) \end{array}$$

On a clairement $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$

donc φ est inversible et $\varphi^{-1} = \psi$

donc A est inversible et

$$A^{-1} = \mathrm{Mat}(\varphi, can) = \left((-1)^i \binom{j}{i} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

car $(X-1)^j = \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} (-1)^i$ par le binôme

$= \sum_{i=1}^{n} \binom{j}{i} (-1)^i$ car $\binom{j}{i} = 0$ dès que $i > j$