Les noyaux itérés

(a) • Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x \in N_k = \mathrm{Ker}(f^k)$

Alors $f^{k+1}(x) = f(f^k(x))$

$= f(0)$ car $x \in N_k$

$= 0$

donc $x \in N_{k+1}$. On a montré $\underline{N_k \subset N_{k+1}}$

• Soit $k \in \mathbb{N}$ et $y \in I_{k+1} = \mathrm{Im}(f^{k+1})$

Alors il existe $x \in E$ tq $y = f^{k+1}(x)$

$= f^k(f(x))$

$\in \mathrm{Im}\, f^k = I_k$

On a montré que $\underline{I_{k+1} \subset I_k}$

(b) • $\underline{\mathcal{I} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k \text{ est un sous-ev}}$ comme intersection de sous-ev

• $\underline{\text{Montrons que } \mathcal{N} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k \text{ est un sous-ev de } E :}$

* $\mathcal{N} \subset E$ car chaque $N_k \subset E$

* $0_E \subset N_0 \subset \mathcal{N}$ donc $\mathcal{N} \neq \emptyset$

* Soit $x_1, x_2 \in \mathcal{N}$, ie $\exists\, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tq $x_1 \in N_{k_1}$
  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ $x_2 \in N_{k_2}$

On pose $k = \mathrm{Max}(k_1, k_2)$. Par (a) $x_1, x_2 \in N_k$

Comme N_k est stable par C.L.,

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in N_k \subset \mathcal{N}$$

donc $\mathcal{N}$ est stable par C.L.

On a montré que $\mathcal{N}$ est un sous-ev de E.

- Montrons que $\mathcal{C}$ est stable par f :

Soit $y \in \mathcal{C}$, ie $\forall k \in \mathbb{N}$, $y \in I_k = \mathrm{Im}(f^k)$

* pour $k=0$, $f(y) \in E = \mathrm{Im}(f^0) = I_0$

* pour tout $k \geq 1$, $y \in I_{k-1}$ donc

$$\exists x_k \in E \text{ tq } y = f^{k-1}(x_k)$$

donc
$$\begin{aligned} f(y) &= f(f^{k-1}(x_k)) \\ &= f^k(x_k) \\ &\in \mathrm{Im}\, f^k = I_k \end{aligned}$$

On a montré que $f(y) \in I_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$, ie $f(y) \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k$.

Ainsi $\mathcal{C}$ est stable par f

- Montrons que $\mathcal{N}$ est stable par f

Soit $x \in \mathcal{N}$, ie $\exists k \in \mathbb{N}$ tq $f^k(x) = 0$

* si $k=0$, c'est que $x=0$ et $f(x) = 0 \in \mathcal{N}$

* sinon, $k \geq 1$ donc $f^{k-1}(f(x)) = 0$

donc $f(x) \in \ker f^{k-1} \subset \mathcal{N}$

On a montré que $\mathcal{N}$ est stable par f

(c) Si f est bijective, f^k est bijective pour tout $k \in \mathbb{N}$,

donc $\ker f^k = \{0_E\}$ $\forall k$

$\operatorname{Im} f^k = E$ $\forall k$

Par suite, $\mathcal{N} = \{0_E\}$ et $\mathcal{C} = E$.

Dans la suite de l'exercice, E est de dimension finie n.

(d) • La suite $(\dim(N_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite d'entiers, croissante par (a), et majorée par n. Elle est donc stationnaire : il existe un plus petit r tq

$$\forall k, \quad \dim N_{r+k} = \dim N_r$$

Mais comme $N_r \subset N_{r+k}$, on a $N_r = N_{r+k}$

donc la suite $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est stationnaire

• De même avec la suite décroissante $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$, stationnaire.

(e) Par le th. du rang,

$$n = \dim N_k + \dim I_k \quad \forall k$$

donc le rang à partir duquel $(\dim N_k)_k$ est constante est

le même que le rang à partir duquel $(\dim I_k)_k$ est constante :

$$\underline{r = s}$$

(f) • D'après (d) et (e), $\underline{\mathcal{N} = N_r = \mathrm{Ker}(f^r)}$ et $\underline{\mathcal{C} = I_r = \mathrm{Im}(f^r)}$.

• Soit $y \in \mathcal{N} \cap \mathcal{C}$, ie $f^r(y) = 0$

et $\exists x \in E$ tq $y = f^r(x)$

Alors $f^{2r}(x) = f^r(y) = 0$

donc $x \in \mathrm{Ker}\, f^{2r} = \mathrm{Ker}\, f^r$ car $2r \geq r$

donc $f^r(x) = 0$, ie $y = 0$

On a montré que $\underline{\mathcal{N} \text{ et } \mathcal{C} \text{ sont en somme directe}}$

• Par le th du rang,

$$\dim \mathcal{N} + \dim \mathcal{C} = \dim \mathrm{Ker} f^r + \dim \mathrm{Im} f^r$$
$$= \dim E$$

On a donc montré :

$$\underline{E = \mathcal{N} \oplus \mathcal{C}}$$

(g) • Par (b), $\mathcal{N}$ et $\mathcal{C}$ sont stables par f donc on peut

parler des endomorphismes induits $f_{\mathcal{N}}$ et $f_{\mathcal{C}}$.

- Soit $x \in \mathcal{N}$.

  Alors $f_{\mathcal{N}}^r(x) = f^r(x)$

  $= 0$ car $x \in \mathcal{N} = \ker f^r$

  donc $f_{\mathcal{N}}^r = 0$, ie $f_{\mathcal{N}}$ est nilpotent

- Soit $x \in \ker f_{\mathcal{C}}$, ie $x \in \mathcal{C} = \operatorname{Im} f^r$ et $f(x) = 0$

  donc $\exists t \in E$ tq $x = f^r(t)$

  Par suite $f^{r+1}(t) = 0$ donc $t \in \ker f^{r+1} = \ker f^r$

  et donc $x = f^r(t) = 0$

  On a montré que $\ker f_{\mathcal{C}} = \{0\}$, ie $f_{\mathcal{C}}$ est injective.

  Or $f_{\mathcal{C}}$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}$ ev de dim finie,

  donc $f_{\mathcal{C}}$ est bijectif.