$E = \mathbb{K}[X], \qquad \varphi(P) = P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(1 - \frac{X}{2}\right) - 2P(X)$

(a) • Si P est un polynôme, $\varphi(P)$ est aussi un polynôme par composition, donc $\underline{\varphi \text{ est à valeurs dans } \mathbb{K}[X]}$

• Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

On calcule :

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)\left(\frac{X}{2}\right) + (\lambda P + \mu Q)\left(1 - \frac{X}{2}\right) \\
&\qquad - 2(\lambda P + \mu Q)(X) \\
&= \lambda\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(1 - \frac{X}{2}\right) - 2P(X)\right] \\
&\qquad + \mu\left[Q\left(\frac{X}{2}\right) + Q\left(1 - \frac{X}{2}\right) - 2Q(X)\right] \\
&= \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q)
\end{aligned}$$

Donc $\underline{\varphi \text{ est linéaire}}$.

• On conclut : $\underline{\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])}$

(b) • Si $P \in \mathbb{K}_0[X]$, ie P constant, alors $\underline{\varphi(P) = 0}$

• Sinon, on écrit $P = a_n X^n + Q$ où $n \geq 1$, $a_n \neq 0$ $Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$

$$\begin{aligned}
\text{et } \varphi(P) &= a_n\left(\frac{X}{2}\right)^n + a_n\left(1 - \frac{X}{2}\right)^n - 2a_n X^n + \underbrace{\cdots}_{\in \mathbb{K}_{n-1}[X]} \\
&= a_n \underbrace{\left(\frac{1 + (-1)^n}{2^n} - 2\right)}_{\begin{cases} -2 \text{ si } n \text{ impair} \\ \frac{1}{2^{n-1}} - 2 \text{ si } n \text{ pair} \end{cases}} X^n + \underbrace{\cdots}_{\in \mathbb{K}_{n-1}[X]}
\end{aligned}$$

donc $\underline{\deg \varphi(P) = n = \deg(P)}$

(c) On a vu ci-avant que si $P \in \mathbb{K}_0[X]$, $\varphi(P) = 0$

si $P \notin \mathbb{K}_0[X]$, $\deg \varphi(P) \geq 1$

donc $\varphi(P) \neq 0$

Ainsi $\underline{\operatorname{Ker} \varphi = \mathbb{K}_0[X]}$

(d) Par (b), $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(Q_n) = n$

donc $(Q_0, \dots, Q_p)$ est <u>à degrés échelonnés</u> donc <u>libre</u>

à $(p+1)$ éléments dans $\mathbb{K}_p[X]$ qui est de dimension $p+1$

donc <u>$(Q_0, \dots, Q_p)$ est une base de $\mathbb{K}_p[X]$</u>.

(e) • Soit $Q \in \operatorname{Im} \varphi$: $\exists P \in \mathbb{K}[X]$ tq $Q = \varphi(P)$.

On calcule alors :

$$\begin{aligned}
\Theta(Q) &= \int_0^1 Q(t)\, dt \\
&= \int_0^1 \varphi(P)(t)\, dt \\
&= \int_0^1 P\left(\tfrac{t}{2}\right) + P\left(1 - \tfrac{t}{2}\right) - 2P(t)\, dt \\
&= \int_0^1 P\left(\tfrac{t}{2}\right) dt + \int_0^1 P\left(1 - \tfrac{t}{2}\right) dt - 2\int_0^1 P(t)\, dt
\end{aligned}$$

$$= 2\int_0^{1/2} P(u)\,du \qquad u = \frac{t}{2} \quad du = \frac{1}{2}dt$$

$$- 2\int_1^{1/2} P(u)\,du \qquad u = 1-\frac{t}{2} \quad du = -\frac{1}{2}dt$$

$$- 2\int_0^1 P(t)\,dt$$

$$= 0$$

donc $Q \in \operatorname{Ker}\Theta$. On a montré que $\underline{\operatorname{Im}\varphi \subset \operatorname{Ker}\Theta}$.

- Soit $Q \in \operatorname{Ker}(\Theta)$.

Alors $\exists N$ tq $Q \in \mathbb{K}_N[X]$ et $\Theta(Q) = 0$

On considère $\varphi_N : \mathbb{K}_N[X] \longrightarrow \mathbb{K}_N[X]$ endom. induit.

$$P \longmapsto \varphi(P)$$

et $\Theta_N : \mathbb{K}_N[X] \longrightarrow \mathbb{K}$

$$P \longmapsto \Theta(P)$$

Par l'étude précédente, $\operatorname{Ker}\varphi_N = \mathbb{K}_0[X]$

$$\operatorname{Im}\varphi_N \subset \operatorname{Ker}\Theta_N$$

Ici, par le th du rang : $\dim \operatorname{Im}\varphi_N = (N+1) - \dim \mathbb{K}_0[X]$

$$= N$$

$$= \dim \operatorname{Ker}\Theta_N$$

donc $\operatorname{Im}\varphi_N = \operatorname{Ker}\Theta_N$

Ainsi, $\exists P \in \mathbb{K}_N[X]$ tq $Q = \varphi_N(P)$

$$= \varphi(P)$$

On a montré que $\operatorname{Im} \varphi = \operatorname{Ker} \theta$.

<u>Remarque</u>. On peut justifier que $\operatorname{Im}\varphi$ est un hyperplan de $\mathbb{K}[X]$ plus simplement :

$$\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Vect}(\varphi(X^k))_{k \in \mathbb{N}}$$

$$= \operatorname{Vect}(Q_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$$

et $(Q_0, (Q_k)_{k \in \mathbb{N}^*})$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ comme famille de polynômes à degré $0, 1, \dots, k, \dots$

Donc, par fractionnement de base,

$$\operatorname{Vect}(Q_0) \oplus \operatorname{Vect}(Q_k)_{k \in \mathbb{N}^*} = \mathbb{K}[X]$$

ie $$\mathbb{K}_0[X] \oplus \operatorname{Im}\varphi = \mathbb{K}[X]$$

donc $\operatorname{Im}\varphi$ est supplémentaire à une droite vectorielle.