(a) En posant :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

$(Z_n)_n$ vérifie : $\underline{\forall n \quad Z_{n+1} = A Z_n + B}$

(b) Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$, on a $\quad AX = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}z \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y - \frac{1}{3}z \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z \end{pmatrix}$

On a :
$$\left|\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}z\right| \leqslant \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)\|X\|_\infty \leqslant \frac{5}{6}\|X\|_\infty$$
$$\left|\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y - \frac{1}{3}z\right| \leqslant \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)\|X\|_\infty \leqslant \frac{5}{6}\|X\|_\infty$$
$$\left|\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z\right| \leqslant \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)\|X\|_\infty \leqslant \frac{5}{6}\|X\|_\infty$$

Donc $\underline{\|AX\|_\infty \leqslant \frac{5}{6}\|X\|_\infty}$

$k = \frac{5}{6}$ convient.

(c) On résout :

$$X = AX + B \iff (I_3 - A)X = B \qquad \text{(on multiplie par 6)}$$

$$\iff \begin{cases} 4x + z = 3 \\ -2x + 5y + 2z = -4 \\ -2x - 2y + 5z = -7 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4x + z = 3 \\ 10y + 5z = -5 & 2L_2 + L_1 \\ -4y + 11z = -11 & 2L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4x + z = 3 \\ 2y + z = -1 & \frac{1}{5}L_2 \\ 13z = -13 & L_3 + 2L_2' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

donc $L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est l'unique solution de $AX + B = X$

(d) On a : $\| Z_{n+1} - L \|_\infty = \| (AZ_n + B) - (AL + B) \|_\infty$

$$= \| A(Z_n - L) \|_\infty$$

$$\leq \frac{5}{6} \| Z_n - L \|_\infty$$

donc, par récurrence, $\| Z_n - L \|_\infty \leq \underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^n}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0} \| Z_0 - L \|_\infty$

On a montré que $Z_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} L$.