(a) • f' est continue sur $[0,1]$, $N(f)$ existe bien

• $\forall f \in E,\quad N(f) \geqslant 0$

• On suppose $N(f)=0$ ie $|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,dt = 0$

donc $f(0)=0$ et $\int_0^1 |f'(t)|\,dt = 0$ (somme nulle de termes positifs)

donc $f(0)=0$ et $\forall t \in [0,1]\ f'(t)=0$

(intégrale nulle d'une fonction continue positive)

donc $f=0$

• Soit $f, g \in E$

$$\begin{aligned} N(f+g) &= |f(0)+g(0)| + \int_0^1 |f'(t)+g'(t)|\,dt \\ &\leq |f(0)| + |g(0)| + \int_0^1 |f'(t)| + |g'(t)|\,dt \\ &= N(f) + N(g) \end{aligned}$$

• Soit $f \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} N(\lambda f) &= |\lambda f(0)| + \int_0^1 |\lambda f'(t)|\,dt \\ &= |\lambda|\, N(f) \end{aligned}$$

On a montré que <u>N est une norme sur E</u>

(b) (b1) • $\forall x \in [0,1]$, $|f_n(x)| = \frac{1}{n} |\sin(\pi n x)|$

$$\leq \frac{1}{n}$$

avec égalité pour $x = \frac{1}{2n}$

donc $\underline{\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}}$

• $N(f_n) = |f_n(0)| + \int_0^1 |f_n'(t)|\,dt$

$= 0 + \int_0^1 \left| \frac{1}{n} . \pi n \cos(\pi n t) \right| dt$

$= \pi \int_0^1 |\cos(\pi n t)|\,dt$

on pose $x = \pi n t$, $dx = \pi n\,dt$

$= \frac{1}{n} \int_0^{n\pi} |\cos(x)|\,dx$

$= \int_0^{\pi} |\cos(x)|\,dx$ par π-périodicité

$= 2 \int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx$ $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$

$= 2$

(b2) On a vu à la question précédente que

$\|f_n - 0_E\|_\infty = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc $\underline{f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\|\cdot\|_\infty} 0_E}$ (c'est une convergence uniforme)

Et $N(f_n - 0_E) = 2 \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0$

donc $\underline{f_n \underset{n \to +\infty}{\overset{N}{\not\longrightarrow}} 0_E}$

(c) Par l'absurde, s'il existe $C>0$ tq $\forall f \in E \quad N(f) \leq C \|f\|_\infty$,

alors en particulier $\forall n \in \mathbb{N} \quad \underset{\substack{\| \\ 2}}{N(f_n)} \leq C \underset{\substack{\| \\ C.\frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0}}{\|f_n\|_\infty}$

ce qui n'est pas possible.

Donc il n'existe pas $C>0$ tq $\forall f \in E$, $N(f) \leq C \|f\|_\infty$

(d) Soit $f \in E$.

Pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt \right| \quad \text{(Th fond. de l'analyse)} \\ &\leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)|\,dt \quad \text{(inég. triangulaire)} \\ &\leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)|\,dt + \int_x^1 |f'(t)|\,dt \\ &= N(f) \quad \text{indépendant de } x \end{aligned}$$

Donc $\|f\|_\infty \leq N(f)$